Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 1, Abgabe bis 24.10.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Inverse Wärmeleitungsproblem*
   Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad x \in (0,1), \qquad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u(x,1) &= u_1(x), \qquad u_1 \in L_2(0,1)\ . \end{aligned}$$

   (a) Lösen Sie die Gleichung durch Separation der Variablen $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.
   Hinweis: Entwickeln Sie $L = \partial_x^2$ mit den Dirichlet-Randbedingungen nach den Eigenfunktionen $\varphi_k(x)$. Benutzen Sie dann die Darstellung in der Eigenfunktionenbasis $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t)\varphi_k(x)$, um die α_k zu finden.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung u^δ der Wärmeleitungsgleichung bei einer Störung

$$u^\delta(x,1) = u_1(x) + \delta \sin(n\pi x), \qquad \delta > 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   und den L_2-Fehler zwischen $u(x,t)$ und $u^\delta(x,t)$ jeweils für $t = 1$ und $t = 0$. Begründen Sie, dass das inverse Wärmeleitungsproblem schlecht gestellt ist.

2. *Numerische Differentiation*
   Sei $f \in C^3[0,1]$ und f^δ eine Störung von f mit

$$\|f^\delta - f\|_\infty \leq \delta, \qquad \delta > 0\ .$$

   Als Näherung der Ableitung einer Funktion betrachten wir einen Differenzenquotienten D_h mit einer Schrittweite $h > 0$.

   (a) Berechnen Sie für die einseitigen und den zentralen Differenzenquotienten den L_∞-Fehler der Annäherung $D_h f^\delta$ zur exakten Lösung f'.

   (b) Bestimmen Sie für ein gegebenes $\delta > 0$ die optimale Schrittweite h_{opt}, die den Gesamtfehler minimiert.

3. *Programmieraufgabe*
   Implementieren Sie die Problemstellung in Aufgabe 2 für eine Funktion f ihrer Wahl. Geben Sie die exakte Funktion f' und die numerische Differentiation von f^δ für verschiedene Werte h und δ aus. Wie sieht die Fehlerabschätzung für die gewählte Funktion aus?