AUFGABE 3

FRANK WÜBBELING

Wir zeigen:

$$\lim_{z\to+0}\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{2}\delta(x,y)\,\mathrm{in}\,D'(I\!R^2).$$

Es sei

$$f(x,y,z) = \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{e^{ikr}}{r}$$

mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und damit

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{ikze^{ikr}}{r^2} - \frac{e^{ikr}z}{r^3}.$$

Wir wollen zeigen, dass f für infinitesimal positives z ein Vielfaches der Delta-Distribution ist. Sei also φ eine Testfunktion im $I\!R^2$, $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^2)$. Sei $\operatorname{supp}\varphi \subset K_R(0)$. Dann ist zu zeigen, dass das Integral I_0 von f gegen φ gerade $\varphi(0,0) = \delta(\varphi)$ ist. Für I_0 gilt

$$\begin{aligned}
I_0(z) &= \int_{I\!R^2}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\varphi(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{I\!R^+} r'\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\varphi(x,y)\mathrm{dr'd}\psi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\left(\frac{ikzr'}{r'^2+z^2} - \frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\right)e^{ik\sqrt{r'^2+z^2}}\varphi(x,y)dr'd\psi
\end{aligned}$$

mit Polarkoordinaten (r',ψ) und $x = r'\cos\psi$, $y = r'\sin\psi$. Zur Vereinfachung der Schreibweise behalten wir die Variablen (x,y) in Abhängigkeit von (r',ψ') bei. Insbesondere gilt $x^2+y^2 = r'^2$ und damit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r'^2+z^2}$.

Weiter gilt

$$\int_0^R \frac{zr'}{r'^2+z^2}dr' = \left[z/2\log(r'^2+z^2)\right]_0^R \to_{z\to 0} 0$$

(wegen $z\log z \to_{z\to 0} 0$) und

$$\int_0^{R'} \frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr' = \left[-\frac{z}{\sqrt{r'^2+z^2}}\right]_0^{R'} \to_{z\to +0} 1$$

für jedes positive R', unabhängig von R'. (Hier wird $z > 0$ benötigt, ansonsten stünde hier -1.) Da $e^{ik\sqrt{r'^2+z^2}}\varphi(x,y)$ beschränkt ist, verschwindet der erste Term in I_0 für $z \to 0$. Im zweiten Term schreibt man das Integral $\int_0^R$ als $\int_0^\epsilon + \int_\epsilon^R$. Das zweite Integral konvergiert für $z \to 0$ gegen 0 (denn der Integrand ist positiv, und $\int_0^\epsilon$ und $\int_0^R$ konvergieren für $z \to 0$ gegen 1, also konvergiert die Differenz gegen 0).

Setze

$$g(x,y) = e^{ik\sqrt{r'^2+z^2}}\varphi(x,y).$$

Der einzige verbleibende Term von I_0 für $z \to 0$ ist dann

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi}\int_0^\epsilon \left(-\frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\right) g(x,y)\mathrm{d}r'\mathrm{d}\psi \\ = \quad & g(\tilde{x},\tilde{y}) \int_0^{2\pi}\int_0^\epsilon \left(-\frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\right)\mathrm{d}r'\mathrm{d}\psi \end{aligned}$$

für ein $(\tilde{x},\tilde{y})$ aus dem Integrationsgebiet, denn g ist stetig (siehe unten). Für $\epsilon \to 0$ zieht sich das Integrationsgebiet auf den Nullpunkt zusammen, d.h. $g(\tilde{x},\tilde{y}) \to_{\epsilon\to 0} g(0,0) = \varphi(0,0)$. Für $z \to 0$ konvergiert das Integral dann gegen -2π. (Zur Vermeidung von Abhängigkeiten zwischen z und ϵ wähle zunächst ϵ klein, fest und dann z für alle Terme gleich.)

Insgesamt konvergiert I_0 also gegen $-2\pi\varphi(0,0) = -2\pi\delta(\varphi)$.

Beweis zur Mittelwerteigenschaft: Es gilt

$$\begin{aligned}
&(\min g(x,y)) \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon} \frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}r' \mathrm{d}\psi \\
\leq\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon} \frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} g(x,y) \mathrm{d}r' \mathrm{d}\psi \\
\leq\ & (\max g(x,y)) \int_0^{2\pi} \int_0^{\epsilon} \frac{zr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}r' \mathrm{d}\psi
\end{aligned}$$

Falls g stetig und das Integrationsgebiet zusammenhängend ist, werden alle Werte zwischen Minimum und Maximum angenommen und es gibt ein $(\tilde{x}, \tilde{y})$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Setze nun $G(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} f(x,y,z)$. Dann ist $\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,+0) = -\frac{1}{2}\delta(x,y)$ in obigem Sinne.