Blatt 5

Frank Wübbeling

23. Mai 2006

1 Aufgabe 16

Eindeutigkeit: Die gewöhnliche homogene Differentialgleichung hat das Fundamentalsystem $u_1(x) = e^{ikx}$ und $u_2(x) = e^{-ikx}$, d.h. alle Lösungen sind von der Form $au_1 + bu_2$. Die Ausstrahlungsbedingungen sorgen für $a = 0$ und $b = 0$.

Lösung: Setze $u(x) = \int e^{ik|x-y|} f(y)dy$. Wir betrachten die Differentialgleichung im distributionellen Sinn auf $\mathcal{C}$. Dann gilt für $v \in \mathcal{C}$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
(u'' + k^2 u)(v) &= \int u(x)(v''(x) + k^2 v(x))dx \\
&= \int \int e^{ik|x-y|} f(y)dy(v''(x) + k^2 v(x))dx \\
&= \int f(y) \int e^{ik|x-y|}(v''(x) + k^2 v(x))dx\, dy \\
&= \int f(y) \int_{y<x} e^{ik(x-y)}(v''(x) + k^2 v(x))dx\, dy \\
&\quad + \int f(y) \int_{x<y} e^{ik(y-x)}(v''(x) + k^2 v(x))dx\, dy \\
&= \int f(y)(+e^{ik(y-y)} v'(y) - ike^{ik(y-y)} v(y))dy \\
&\quad + \int f(y)(-e^{ik(y-y)} v'(y) - ike^{ik(y-y)} v(y)dy) \\
&= -2ik \int f(y)v(y)dy
\end{aligned}$$

also löst $-\frac{1}{2ik}u$ die Aufgabe im schwachen (distributionellen) Sinne.

2 Aufgabe 17

Laut Vorlesung ist die Fouriertransformation der charakteristischen Funktion des Einheitsintervalls $[-1,1]$ gerade $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{sinc}(x)$. Damit ist die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion χ_1 des Einheitsquadrats $[-1,1]^2$ gerade $\frac{2}{\pi}\mathrm{sinc}(x)\mathrm{sinc}(y)$. Das Einheitsquadrat wird auf das angegebene Quadrat abgebildet mittels einer Drehung um 30 Grad und einer anschliessenden Streckung um den Faktor $\sqrt{2}$. Es gilt also mit der entsprechenden Transformationsmatrix A die Gleichung $\chi(x) = \chi_1(A^{-1}x)$. Mit Aufgabe 1 ist die Fouriertransformierte sofort berechenbar.

Zwei kurze Übungen:

1. Sei $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$. Dann ist $\widehat{f} = \widehat{g}\widehat{h}$:

$$\begin{aligned}
f(\xi_1, \xi_2) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}^2} g(x_1)h(x_2)e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}dx_1 dx_2 \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} g(x_1)e^{-ix_1\xi_1}dx_1 (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} h(x_2)e^{-ix_2\xi_2}dx_2 \\
&= \widehat{g}(\xi_1)\widehat{h}(\xi_2)
\end{aligned}$$

2. Sei $f(x) = \chi_1(x)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{-i\xi}(e^{-i\xi} - e^{i\xi})dx \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(\xi)}{\xi} \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{sinc}(\xi)
\end{aligned}$$

3 Aufgabe 18

Die Aufgabe lässt sich auch mit dem Abtasttheorem lösen. Direkt in n Dimensionen:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}f(x)dx \\ &\sim (2\pi)^{-n/2}h^n\sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ikh\xi}f(kh) \\ &= h^n(2\pi)^{-n/2}\sum_{k=-N}^{N-1} e^{-ikh\xi}f(kh)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\pi j/R) &\sim h^n(2\pi)^{-n/2}\sum_{k=-N}^{N-1} e^{-2\pi ikj/(2N)}f(kh) \\ &= h^n(2\pi)^{-n/2}\widehat{f}_j\end{aligned}$$

mit $f_k = f(kh)$.

Problem: $\hat{f}$ ist nicht periodisch (denn es ist in $\mathcal{S}$), aber die diskrete Fouriertransformierte ist periodisch mit Periode $2N$. Es stellt sich also die Frage: Für welche j macht das $\sim$ tatsächlich Sinn?

Die Poissonsche Formel liefert:

$$h^n(2\pi)^{-n/2}\sum_{k=-N}^{N-1} e^{-2\pi ikj/(2N)}f(kh) = \sum_{l\in\mathbf{Z}^n}\widehat{f}(\frac{\pi j}{R} - 2\frac{\pi}{h}l)$$

Wir erhalten: Die Summe, die wir durch die Trapezregel erhalten, ist eine Summe von Werten der Fouriertransformierten. Da $\widehat{f}$ in $\mathcal{S}$ liegt, fällt es schnell. Für ausreichend kleines h ist das Element der Summe, dessen Argument am nächsten an 0 liegt, das größte. Es macht also Sinn, die Näherung für $k = -N \dots N-1$ zu betrachten.

Insgesamt: Die diskrete Fouriertransformierte ist eine Näherung an die analytische Fouriertransformierte, vorausgesetzt, man beachtet, dass die Fourierkoeffizienten im Bereich $[-N, N-1]$ gewählt werden.

4 Aufgabe 19

Zur Aufgabenstellung: Im Radar wird die Fouriertransformierte einer Funktion mehr oder weniger direkt gemessen (genauso übrigens bei der Magnetresonanztomographie). In Aufgabe 18 haben wir gezeigt, dass die diskrete und die analytische Fouriertransformation eng zusammenhängen. Es bietet sich daher die folgende Vorgehensweise an:

1. Wir wollen eine Approximation an die gesuchte Funktion f berechnen. Hierzu legen wir zunächst einen Bildraum (ein Quadrat mit Seitenlänge $2R$ im $\mathbb{R}^2$ fest, in dem der Träger der Funktion liegen soll und diskretisieren.

2. Durch (gedachte) diskrete Fouriertransformation dieser Näherung erhalten wir eine neue Matrix. Das Element (k_1, k_2) dieser Matrix entspricht im Fourierraum dem Wert der Fouriertransformierten an der Stelle $(2\pi)^{n/2}h^{-n}\widehat{f}(\pi k/R)$.

3. Wir nehmen an, dass wir die Fouriertransformierte der gesuchten Funktion kennen. Dort, wo wir sie berechnen können, tragen wir die entsprechenden Werte in unsere Matrix ein.

4. Statt einer analytischen inversen Fouriertransformation führen wir eine diskrete durch. Der Fehler dabei ist nach Aufgabe 18 begrenzt. Das Ergebnis ist eine Approximation an die gesuchte Funktion.

Ein vernünftiger Wert ist $N = 256$, für diesen Wert ist das messbare Fourierspektrum ganz in der Matrix enthalten.

Implementation in matlab: Die Implementation ist schleifenfrei möglich. Am einfachsten berechnet man zunächst das komplette Fourierspektrum der Funktion und blendet dann je nach Wahl der Parameter die nicht messbaren Teile aus.