

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 7 , Abgabe: 2. 6. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Sei R die Radon–Transformation im \mathbb{R}^n , also

$$Rf(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx.$$

Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$R(D^\alpha f)(\theta, s) = \theta^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^{|\alpha|} (Rf)(\theta, s).$$

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Sei P die Röntgentransformation im \mathbb{R}^n , also

$$(Pf)(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt$$

mit $x \cdot \theta = 0$. Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$P^*Pf = 2|x|^{1-n} * f.$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Sei $0 < \beta < \alpha < 2\pi$, $\alpha + \beta = 2\pi$. $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, $\Phi(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq \alpha$, und $\Phi(\xi) > 0$ für $|\xi| \leq \beta$. Zeigen Sie:

$$e^{-ix\xi} = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\Phi(\xi)} \sum_m \widehat{\Phi}(x - m) e^{-im\xi}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $|\xi| \leq \beta$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\widehat{\Phi}(x - y)e^{-iy\xi}$.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Machen Sie sich mit den Funktionen zur Audioausgabe in Matlab vertraut. Benutzen Sie die Funktionen wavwrite und sound.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das eine T Sekunden lange Audiodatei mit dem Kamerton A (440 Hz) bei einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde erstellt.

(b) Schreiben Sie ein Programm, das eine Audiodatei erstellt, die die Funktion $\sin(t^2/A^2)$ (chirp) für $t = 0 \dots T$ (Sekunden) mit einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde repräsentiert.

(c) Testen Sie Ihr Programm für $T = 5$ und $P = 8192$. Wählen Sie A so, daß bei $t = 5$ die Frequenz 1000 Hz beträgt.

(d) Spielen Sie Ihre Datei ab und erklären Sie das Ergebnis. Wie muß P mindestens gewählt werden, damit der Effekt nicht mehr auftritt?