Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5 , Abgabe: 19.5.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Wir betrachten im $\mathbb{R}^1$ die Aufgabe

$$-u'' - k^2 u = f$$

mit den Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{x\to\infty}(u' - iku)(x) = 0, \lim_{x\to-\infty}(u' + iku)(x) = 0$$

mit $k > 0$ und $f \in C_0(\mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie, dass die Aufgabe eindeutig lösbar ist und geben Sie die Lösung an.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{\chi}$ der charakteristischen Funktion χ des Quadrats mit den Eckpunkten $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-1, -\sqrt{3})$.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Sei $f \in L_1(I\!R)$ mit Träger innerhalb des Kreises um 0 mit Radius R. Sei $N \in \mathbb{N}$ fest, $A \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$, $A_{k,l} = f(Rk/N, Rl/N)$ für $k = -N \dots N-1$ und $l = -N \dots N-1$. Zeigen Sie:

Sei N_f die numerische Auswertung der Fouriertransformierten von f, bei der das Fourierintegral näherungsweise durch die Trapezregel mit Schrittweite $h = 2R/N$ ausgeführt wird. Zeigen Sie, dass für die diskrete zweidimensionale Fouriertransformierte von A gilt:

$$\widehat{A}_{k,l} = h^2 N_f(\pi k/R, \pi l/R).$$

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Im Radar lässt sich nur ein kleiner Teil des Fourier–Spektrums einer Funktion messen. Berechnen Sie das hierdurch erreichbare Bild mit folgendem numerischen Experiment:

Simulieren Sie zunächst eine optimale Messung, indem Sie der Matrix A aus Aufgabe 18 die Werte $A_{k,l} = (4/N)^2 \widehat{\chi}(\pi k/2, \pi l/2)$, χ aus Aufgabe 17, zuweisen.

Berechnen Sie die diskrete zweidimensionale inverse Fouriertransformierte von A und zeigen Sie sie an. Das Ergebnis sollte ein fast perfektes gedrehtes Quadrat sein.

<u>Hinweis:</u> Matlab führt die Fouriertransformation mit Indizes ab 0 durch, in unserer Definition laufen die Indizes ab $-N$, deshalb müssen Sie die Matrix umordnen. Sie können hierzu die Funktion fftshift benutzen.

Wiederholen Sie das Experiment nun, aber schränken Sie vor der inversen Fouriertransformation die Anzahl der Messpunkte ein. Nehmen Sie an, dass Sie $\widehat{f}(\omega\theta)$ nur für $\omega_0 < \omega < \omega_1$ und $|\varphi| < \psi$, $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, messen können, und setzen Sie die nicht messbaren Teile der Fouriertransformation auf 0. Typisch für Radar ist $\omega_0 = 200$, $\omega_1 = 300$, $\psi = 0.3$. Dokumentieren Sie das Ergebnis (per Ausdruck oder Mail) für diese und einige andere Werte.