**Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen**

Übungsblatt 4 , Abgabe: 12.5.2006 , 15.00 Uhr

---

**Aufgabe 12:** (4 Punkte)
Sei $u$ die Lösung der Aufgabe

$$(-\Delta u - k^2 u)(x', x_3) = f(x')\delta(x_3),\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

im $\mathbb{R}^3$, welche die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Zeigen Sie:

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3) = -\frac{1}{2} f(x').$$

**Aufgabe 13:** (4 Punkte)
Sei $f \in C(\mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie: Für $\theta \in S^{n-1}$, $n \geq 2$ gilt

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(\theta \cdot x) d\sigma(x) = |S^{n-2}| \int\limits_{-1}^{+1} f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt.$$

Hierbei ist $|S^{n-1}|$ die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$, also $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

**Aufgabe 14:** (4 Punkte)
Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Zeigen Sie für $s > 0$:

$$\int\limits_{x_n = s} f(x) dx = \int\limits_{S_+^{n-1}} f\left(\frac{sx}{x_n}\right) \frac{s^{n-1}}{x_n^n} d\sigma(x)$$

mit $S_+^{n-1} = \{x \in S^{n-1} : x_n > 0\}$.

**Aufgabe 15:** (4 Punkte)
Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\sigma(\theta) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y|} \mathrm{d}y.$$

Hier ist $\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = 0\}$.