Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2 , Abgabe: 27.4.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Sei

$$a(\eta) = \begin{cases} \sqrt{k^2 - |\eta|^2}, & |\eta| < k, \\ i\sqrt{|\eta|^2 - k^2}, & |\eta| \geq k. \end{cases}$$

Dann gilt nach Vorlesung für die Funktion $G(x)$ aus Aufgabe 3

$$G(x) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{I\!R^2} e^{i(|x_3|a(z) - x' \cdot z)} \frac{dz}{a(z)}, \; x = \begin{pmatrix} x' \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie ausgehend von dieser Darstellung die Aussage von Aufgabe 3:

$$\lim_{x_3 \to 0} \frac{\partial G}{\partial x_3}(x', x_3) = -\frac{1}{2}\delta(x').$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Es sei $c : I\!R^2 \mapsto I\!R$ eine Geschwindigkeitsverteilung,

$$c(x) = \begin{cases} c_0, & x_2 < h_0 \\ c_1, & h_0 \leq x_2 < h_1 \\ c_2, & h_1 \leq x_2. \end{cases}$$

Sei $k(x) = \omega/c(x)$, $\omega > 0$. u erfülle die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u + k(x)^2 u = 0$$

für $x_2 > 0$, die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 1$ und die Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{x_2 \to \infty} (\frac{\partial u}{\partial x_2} - iku) = 0$$

.

a) Berechnen Sie die analytische Lösung für u.
b) Stellen Sie u graphisch dar für die folgende Wahl der Parameter:

$$\omega = 20, \; c_0 = 1, \; c_1 = 4, \; c_2 = 2, \; h_0 = \pi, \; h_1 = 2\pi.$$

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Sei $c > 0$ konstant und $s \in C^1(I\!R^1)$. Sei $s(t) = 0$ für $t \leq 0$.
Zeigen Sie: Die Aufgabe im $I\!R^3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \; t > 0, \; x_3 > 0$$

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} s(t)\delta(x'), \; x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; u = 0 \, \text{für} \, t \leq 0$$

hat die Lösung

$$u(x,t) = \frac{s(t - |x|/c)}{4\pi|x|}.$$