Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 1 , Abgabe: 13.4.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $f_1(x) = f(Ax+b)$ mit einer invertierbaren (n,n)-Matrix A und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{|A|} e^{i\xi \cdot A^{-1}b} \hat{f}(A^{-T}\xi) \ .$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion der Gestalt

$$f(x) = p(x)e^{-x^2/2}$$

mit einem Polynom p vom Grade n. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ die gleiche Gestalt hat.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei G auf $\mathbb{R}^3$ die Distribution

$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{x_3 \to 0} \frac{\partial G}{\partial x_3}(x', x_3) = -\frac{1}{2}\delta(x').$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Das Ricker–Wavelet $q(t)$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit betragsmaximaler Kreisfrequenz $\sqrt{2}\omega_0$ ist erklärt durch

$$q(t) = \frac{d^2}{dt^2} e^{-(\omega_0 t)^2/2}.$$

(a) Berechnen Sie q und stellen Sie q graphisch dar.
(b) Zeigen Sie, dass $\hat{q}$ sein Betragsmaximum bei $\pm\sqrt{2}\omega_0$ annimmt.