Blatt 7

Frank Wübbeling

13. Juni 2006

1 Aufgabe 24

Alternative Lösung: Sei die Deltadistribution angenähert durch die Funktionen δ_p aus einer alten Aufgabe. Dann gilt für $\alpha = e_1$:

$$
\begin{aligned}
R(D^\alpha f)(\theta, s) &= R(\frac{\partial f}{\partial x_1})(\theta, s) \\
&= \int_{x\cdot\theta=s} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x\cdot\theta - s)\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim \int_{\mathbf{R}^n} \delta_p(x\cdot\theta - s)\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\lim \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_1}\delta_p(x\cdot\theta - s) f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\lim \theta_1 \int_{\mathbf{R}^n} \delta_p'(x\cdot\theta - s) f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim \theta_1 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial s}\delta_p(x\cdot\theta - s) f(x)\mathrm{d}x \\
&= \theta_1 \frac{\partial}{\partial s}(Rf)(\theta, s)
\end{aligned}
$$

Die Vertauschung von Differentiation und Integration im letzten Schritt muss man noch begründen.

2 Aufgabe 25

Zur Erinnerung: P ist eine Abbildung von $S^{n-1} \times \theta^\perp$ nach $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(Pf, g) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} Pf(\theta, x) g(\theta, x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} \int_{\mathbf{R}} f(x + t\theta) \mathrm{d}t g(\theta, x) \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^3} f(x) g(\theta, x - (x \cdot \theta)\theta) \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} f(x) \int_{S^{n-1}} g(\theta, x - (x \cdot \theta)\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und damit

$$(P^* g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x - (x \cdot \theta)\theta) \mathrm{d}\theta.$$

$$\begin{aligned}
(P^* P f)(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbf{R}} f(x - (x \cdot \theta)\theta + t\theta) \mathrm{d}t \mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^+} f(x + t\theta) \mathrm{d}t \mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-1}} f(x - y) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

3 Aufgabe 26

Einzeiler, wenn man es richtig macht und die Zeile lang genug ist. Wir betrachten wie vorgeschlagen die Funktion $F(y) = \widehat{\Phi}(x - y)e^{-iy\xi}$. Nach Voraussetzung hat $\widehat{\Phi}$ die Bandbreite α. Durch die Multiplikation wird der Träger um ξ verschoben, d.h. anschließend liegt der Träger in $[-2\pi, 2\pi]$, denn $\xi \leq \beta$. Damit ist die Trapezregel mit Schrittweite 1 exakt für diese Funktion, und es gilt

$$\sqrt{2\pi} e^{-ix\xi} \Phi(\xi) = \int \widehat{\Phi}(y) e^{-i(x-y)\xi} \mathrm{d}y = \int \widehat{\Phi}(x-y) e^{-iy\xi} \mathrm{d}y = \int F(y) \mathrm{d}y = \sum_m \widehat{\Phi}(x-m) e^{-im\xi}$$