Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn

SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 9, Abgabe: **Do. 24.6.99**, 13.00 Uhr

Dieser Zettel dient als Vorbereitung auf die Klausur.

Aufgabe 34: (15 Punkte)
Man bestimme sämtliche Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x' &= (3t-1)x - (1-t)y + te^{t^2} \\ y' &= -(t+2)x + (t-2)y - e^{t^2} \end{aligned}$$

Anleitung. Das homogene System hat eine Lösung der Form $(x(t), y(t)) = (\phi(t), -\phi(t))$.

Aufgabe 35: (20 Punkte)
Geben Sie ein Fundamentalsystem an für das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 + 1 \\ y_2' &= \tfrac{3}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 - 2 \\ y_3' &= \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 + x \end{aligned} \tag{1}$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = -1.$$

Aufgabe 36: (15 Punkte)
Es gilt:

$$ag'' + bg' + cg = 0$$

mit positiven Konstanten a, b und c und $g \in C^{(2)}[0, \infty)$. Zeigen Sie, daß $g(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 37: (15 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y'(x) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2},\ y(0) = 1,$$

[Zur Kontrolle: $y(1) = 1$]

Aufgabe 38: (15 Punkte)
Richtige Antwort: + Punkte
Falsche Antwort: - Punkte
Keine Antwort: 0 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung. (Vorsicht!)

1. $J := [0, 1]$, $f \in C^1(D)$, $D = J \times \mathbb{R}$. Dann hat die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y)\ ,\ y(0) = 0$$

eine Lösung $y(x)$, die auf J definiert ist.

2. Es sei $x \in C^2[0,1]$, mit $x''(s) \geq 0$, $s \in [0,1]$. Dann gilt: $x(s) \geq \dfrac{s^2}{4}$, $s \in [0,1]$.

3. Es sei $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda := spur(A)/n$, $u := (1,1,1,...,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $x(t) := e^{\lambda t}u$ eine Lösung der Gleichung $x'(t) = Ax$.

Aufgabe 39: (20 Punkte)
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(1-(N-c)^2)\ ,\ 0 \leq c < 1 \\ N(0) &= 1 \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Bestimmen Sie die Ruhepunkte.

c) Geben Sie eine lineare Gleichung für $\frac{\partial N}{\partial c}$ an.

d) Bestimmen Sie die analytische Lösung für $c = 0$.