Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen”

Übungsblatt 8, Abgabe: **Do. 17.6.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 30: (4 Punkte)
u erfülle die Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$p_0(t)\frac{d^n u}{dt^n} + \cdots + p_n(t)u = 0,$$

d.h. $\sum_{k=0}^{n} p_k(t)u^{(n-k)}(t) = 0$.

a) Sei $\mathbf{v}(t) := (u(t), u^{(1)}(t), \cdots, u^{(n-1)}(t))^T \in \mathbb{R}^n$
Zeigen Sie, daß $\mathbf{v}$ eine Gleichung der Gestalt

$$\mathbf{v}'(t) = A(t)\mathbf{v}(t) \tag{1}$$

erfüllt und geben die Matrix $A(t)$ explizit an.

b) Sei $W(t)$ die Wronski-Determinante eines Lösungssystems $Y(t)$ von (1). Bestimmen Sie $W(t)$.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei $\phi(t;a)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\phi''(t) + a\phi(t) = 0, t > 0 \\ &\phi(0) = 1, \phi'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sei $\phi_a(t) := \frac{\partial}{\partial a}\phi(t;a)$.
Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} &\phi_a''(t) + a\phi_a(t) = -\phi(t;a), t \geq 0 \\ &\phi_a(0) = 0, \phi_a'(0) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

indem Sie

a) $\phi(t;a)$ explizit berechnen und die Bedingungen (3) überprüfen.

b) Das Problem (2) in ein Problem für Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln und danach den Satz aus Walter S. 131 anwenden.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
$f(x,y)$ sei Lipschitz stetig auf $J \times \mathbb{R}$, $J := [a,b]$.
Es gilt: $u, v \in C^1(J)$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x,u(x)),\ x \in J, \\ v'(x) &\leq f(x,v(x)),\ x \in J, \\ v(a) &\leq u(a). \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$v(x) \leq u(x),\ x \in J.$$

Hinweis: Man betrachte die Lösungen u_n der "gestörten" Gleichung

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= f(x, u_n(x)) + \frac{1}{n},\ x \in J \\ u_n(a) &= u(a),\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

und zeigt, daß $v \leq u_n,\ x \in J$. Danach eine Anwendung von Satz VI, Walter S. 121.

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Lösen Sie folgendes System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{t(u_1+u_2)+u_1-u_2}{t-1} \\ u_1+u_2 \end{pmatrix}$$

mit $u_i = u_i(t), i = 1, 2$.

Hinweis: Benutzen Sie das Verfahren von d'Alembert (Walter, S. 141).