Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 7, Abgabe: **Do. 10.6.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Man zeige, daß für die Differentialgleichung mit getrennten Variablen, genauer für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)g(y), \qquad y(\xi) = \eta,$$

die Ableitungen der Lösung $y(x;\xi,\eta)$ im Fall $g(\eta) \neq 0$ durch

$$\begin{aligned} y_\xi(x;\xi,\eta) &= -f(\xi)g(y(x;\xi,\eta)), \\ y_\eta(x;\xi,\eta) &= g(y(x;\xi,\eta))/g(\eta) \end{aligned}$$

gegeben sind. Dabei ist nur Stetigkeit von f und g vorausgesetzt. Anleitung: Man differenziere die Identität

$$\int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x f(t)dt.$$

Aufgabe 27: (3 Punkte)
Die Funktion f genüge im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einer lokalen Lipschitzbedingung in y. Man zeige: f genügt auf kompakten Teilmengen von D einer Lipschitzbedingung in y.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Das linearisierte mathematische Pendel:

a) Bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi} + a\phi = 0, \\ &\phi(0) = \eta_0, \\ &\dot{\phi}(0) = \eta_1, \\ &a = g/l > 0, \text{ mit } l = \text{ Länge des Pendels, } g = 9,81 m/s^2 \text{ die Schwerkraft.} \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei bedeuten $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ und $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$ die Ableitungen nach der Zeit t (Sekunde), wobei ϕ den Winkel zwischen der Senkrechten und der Pendelstange bezeichnet (rad).

b) Man baut eine Pendeluhr, so daß das Pendel einmal pro Sekunde hin und zurück pendelt. Wie lang muß das Pendel sein?

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und

$$f : I \times I \to \mathbb{R}\,,\ (x,y) \to f(x,y),$$

eine stetige, nach der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbare Funktion. Man zeige, daß die durch

$$F(y) := \int_a^y f(x,y)dx$$

definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und daß für alle $y \in I$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y) = f(y,y) + \int\limits_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Anleitung: Man beweise, daß die durch

$$G(y,z) := \int\limits_a^z f(x,y)dx$$

definierte Funktion $G : I \times I \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar ist und wende die Kettenregel an.