Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn

SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 6, Abgabe: **Mi. 2.6.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 22: (3 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. A erfüllt die Bedingung KT, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\bigcup_{i\in I} U_i$ von A eine endliche Überdeckung $\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$ von A gibt. A erfüllt die Bedingung KA, wenn jede Folge $\{x_n\}$ aus A eine konvergente Teilfolge besitzt mit Grenzwert in A.

Zeigen Sie, $KT \Rightarrow KA$, wobei Sie folgendes benutzen dürfen: Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 23: (3 Punkte)
Man löse das Anfangsproblem $(n = 3)$

$$y' = \begin{pmatrix} y_2 \quad y_3 \\ -y_1 \quad y_3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch Iteration. Wie lautet die k-te Approximation $y_k(x)$, wenn man von $y_0(x) = y(0)$ ausgeht?

Aufgabe 24: (5 Punkte)
Ein Skifahrer fährt "Schuß" auf einem Hang mit Hangwinkel α. Es gilt (Newtonsche Gesetze):

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - D$$

mit

$$D = \frac{1}{2}\rho A C_D v^2$$

und

$$m = \text{ Masse.}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $s(t) = v(t) = 0$.

a) Formulieren Sie diese Anfangswertaufgabe als eine Anfangswertaufgabe für ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}' = \underline{f}(s,v)\,, \quad \begin{pmatrix} s \\ V \end{pmatrix}(0) = 0 \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie eine analytische Lösung der Gleichung (1).

c) Beweisen Sie, daß die Anfangswertaufgabe (1) genau eine Lösung besitzt, und das diese Lösung für $t \in [0, \infty)$ existiert.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß das System

$$\begin{aligned} x' &= g(x) \\ y' &= f(x)y \end{aligned}$$

für einen gegebenen Anfangswert auf einem beliebigen Intervall höchstens eine Lösung hat.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie das Gronwallsche Lemma, vgl. Walter, §29 VI, S. 278 (6. Auflage).