Prof. Dr. C.W. Cryer SS 1999
Dr. A. Klawonn

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 5, Abgabe: **Do. 20.5.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 18: (3 Punkte)
Es sei $f(x,y) \in C^2(\mathbf{R}^2)$ und $y(x) = \int\limits_0^x f(t,y(t))dt$, $0 \le x \le 1$.

a) Zeigen Sie, daß das Integral

$$\int\limits_0^1 y(x)dx$$

existiert und daß

$$\int\limits_0^1 y(x)dx = \int\limits_0^1 (1-x)f(x,y(x))dx.$$

b) Zeigen Sie, daß $y(x) \in C^3(0,1)$.

Aufgabe 19: (6 Punkte)
Die Funktion $f(x,y)$ sei im Streifen $S = J \times \mathbf{R}$, $J = [0,a]$, stetig und genüge der Bedingung

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le \frac{k}{x}|y-z| \text{ für } 0 < x \le a \text{ und } y,z \in \mathbf{R}$$

mit $k < 1$. Man zeige, daß das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \text{ in } J, y(0) = \eta$$

genau eine Lösung besitzt, und daß sich diese durch sukzessive Approximation berechnen läßt. Die obige Bedingung wurde von Rosenblatt (1909) angegeben.

Benutzen Sie als Banachraum $C(J)$, den Raum aller stetigen Funktionen auf J, mit endlicher Norm

$$||u|| := \sup_{x\in(0,a]} \left(\frac{|u(x)|}{x} \right).$$

Aufgabe 20: (3 Punkte)
Konstruieren Sie die Picard-Iterationen y_n (vgl. Walter, S. 58, (6)) für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= 2x(y+1) \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die y_n gegen die Lösung

$$y(x) = e^{x^2} - 1$$

konvergieren.

Aufgabe 21: (3 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Lösung y(x) des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

für $x \in J := [0,1/2]$ existiert und in J der Ungleichung $|y(x)| \le 1$ genügt.