Prof. Dr. C.W. Cryer SS 1999
Dr. A. Klawonn

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 4, Abgabe: **Mi. 12.5.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Sei $X = C(J)$, die Menge aller stetigen reellen Funktionen, die auf $J := [0, 1]$ erklärt sind. Sei

$$||u||_1 = \sup_{x \in J} |u(x)e^{-\alpha x}|$$

mit $\alpha \in$.

Zeigen Sie, daß

a) $||\cdot||_1$ eine Norm ist.

b) Mit der Norm $||\cdot||_1$ ist X vollständig.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Die Funktion $k(x, t, z)$ sei für $0 \le t \le x \le a$, $-\infty < z < \infty$ stetig und genüge einer Lipschitzbedingung in z

$$|k(x, t, z) - k(x, t, \bar{z})| \le L|z - \bar{z}|,$$

die Funktion $g(x)$ sei für $0 \le x \le a$ stetig. Man zeige durch Anwendung des Fixpunktsatzes, daß die "Volterra-Integralgleichung"

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t, u(t))dt$$

genau eine in $0 \le x \le a$ stetige Lösung besitzt.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Ein einfaches Modell zur Beschreibung von Sprints in der Leichtathletik (Länge der Laufstrecke etwa bis 290 m) ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= f - \sigma v. \end{aligned}$$

Dabei ist $x = x(t)$ der Abstand zum Startpunkt des Rennens und $v = v(t)$ die Geschwindigkeit jeweils zum Zeitpunkt t. Es gilt:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad \text{(Startpunkt)} \\ v(0) &= 0 \qquad \text{(Startgeschwindigkeit)} \end{aligned}$$

Die Parameter σ und f sind positive Konstanten.

a) Bestimmen Sie $x(t)$ und $v(t)$.

b) Zeigen Sie, daß

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} v(t) &= f/\sigma \\
\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} &= f/\sigma.
\end{aligned}
$$

c) Bestimmen Sie die Laufzeit für den 100 m Lauf mit folgenden Daten:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= 0,581 \\
f &= 7,10.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Bestimmen Sie, mit Beweis, ob folgende Funktionen Lipschitz stetig sind. Falls ja, geben Sie eine Abschätzung für L an:

a) $\sin(x),\ -\pi \le x \le \pi.$

b) $e^x,\ 0 \le x \le \infty.$

c) $x \log x,\ 0 \le x \le 1.$