Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn

SS 1999

Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen”

Übungsblatt 3, Abgabe:Do. 6.5.1999, 13.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Sei

$$f_n(x) := nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}, -1 \leq x \leq 1, n \in .$$

Bestimmen Sie, ob die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Sei φ die Menge aller reellen Folgen $x = \{x_n\}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^{1/2} < \infty$. Für $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ und $\lambda \in$ sei: $x + y := \{x_n + y_n\}$, $\lambda x := \{\lambda x_n\}$.
Zeigen Sie:

a) φ ist ein reeller Vektorraum.

b)

$$\rho(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{1/2}$$

erfüllt die Bedingungen für eine Metrik

i) $\rho(x,y) \geq 0$

ii) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

iv) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

c) $d(x) := \rho(x,0)^{1/2}$ ist keine Norm.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Die Entwicklung des HIV Virus im Körper ist sehr erfolgreich durch das folgende Modell modelliert worden:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= s + pT(1 - \frac{T}{T_{max}}) - d_T T - kVT \\
\frac{dT^*}{dt} &= kVT - \delta T^* \\
\frac{dV}{dt} &= N\delta T^* - cV,
\end{aligned}$$

wobei $T(t)$ die Anzahl nicht infizierter Zellen ist, $T^*(t)$ die Anzahl infizierter Zellen (die neue Viren produzieren) und $V(t)$ die Anzahl Viren ist. Die Parameter $s, p, T_{max}, d_T, k, \delta, N$ und c sind positive Konstanten.

Sei $\{T_0, T_0^*, V_0\}$ eine stationäre Lösung.

a) Zeigen Sie, daß $T_0 = \dfrac{c}{Nk}$

b) Bestimmen Sie T_0^* und V_0.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Gleichungen:

a) $(1+y)y' = x^2(1-y)$

b) $(x^2+y^2)y' = xy$

c) $y' + y^2 = x^{-4}$
(Hinweis: $y = (x+1)/x^2$ ist eine Lösung)

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $D(J)$ die Menge aller reellen, stetigen Funktionen auf $J := [0, a]$ mit der Norm

$$||f|| = \max_{x \in J} |f(x)e^{-ax}|.$$

Der Opterator $T : D(J) \to D(J)$ sei definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^x t f(t) dt.$$

Bestimmen Sie $||T||$.