Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 1, Abgabe:Do. 22.4.1999, 13.00 Uhr

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Beweisen Sie folgenden Satz: Ist ϕ eine im Intervall J differenzierbare Funktion und $\phi'(x) \neq 0$ in J, dann besitzt ϕ eine differenzierbare Umkehrfunktion ψ und

$$\psi'(y) = \frac{1}{\phi'(\psi(y))}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Lösung $y(x)$ der Gleichung

$$(x^2 - x)y' = y^2 + y \tag{1}$$

mit $y(1) = 1$, indem Sie (1) als Gleichung mit getrennten Veränderlichen schreiben.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
$y(x)$ sei eine Lösung der DGL

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Sei $u(s) = \beta[y(\gamma s + \alpha) + \phi(s)]$ wo α und β, γ Konstanten sind und ϕ eine gegebene Funktion ist. Bestimmen Sie eine DGL für $u(s)$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Zur Modellierung des Wachstums einer Fischpopulation wird das Beverton-Holt Modell oft benutzt:

$$\frac{dN}{dt} = N\frac{r}{\alpha + N} \tag{2}$$

wobei N die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt t ist und r und α positive Konstanten sind.

a) Zeigen Sie, daß $N(t)$ eine Lösung von (2) ist, falls

$$N(t)^\alpha e^{N(t)} = Pe^{rt} \tag{3}$$

gilt. Dabei ist P eine Konstante.

b) Zeigen Sie, daß (3) eine eindeutige Lösung $N(t)$ hat. (Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen an.)

c) Benutzen Sie die "Methode der getrennten Veränderlichen" um (3) herzuleiten.

d) Eine Population besteht aus zwei Teilen, jung und alt. Die Anzahl der Mitglieder in den Teilen werden mit $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ bezeichnet, wobei t die Zeit in Jahren ist. Es werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- Die prozentualen Geburtenraten für jung und alt sind α_1 und α_2. Die prozentualen Sterberaten für jung und alt sind β_1 und β_2. Jedes Jahr altern prozentual γ Jungtiere.
- Erstellen Sie Differentialgleichungen für $u_1(t)$ und $u_2(t)$, die diese Annahmen beinhalten.