Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die inverse Matrix von

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Prüfen Sie die Konvergenz von Gesamt– und Einzelschrittverfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für $b \in I\!R^n$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

a) Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix durch für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Nehmen Sie an, dass alle Eigenwerte von A reell sind. Geben Sie für diesen Fall eine Abschätzung für den kleinsten Eigenwert von A an. Hinweis: Benutzen Sie die erste QR–Iterierte.

Aufgabe 3:

Sei $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ ein Vektor aus dem $I\!R^n$. Die Kosinus–Transformation $\hat{a}$ von a, $\hat{a} = (\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_{n-1})$ ist definiert durch

$$\hat{a}_l = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos(\pi k l / n).$$

Zeigen Sie: Die Kosinustransformation kann in $O(n \log n)$ Rechenoperationen berechnet werden. Ist die Kosinustransformation invertierbar?

Aufgabe 4:

Sei $w(x) = x^2$ und $x_k = -1 + 2k/(n-1)$, $k = 0..n-1$. Bestimmen Sie für $n = 4$ eine Integrationsformel der Form

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k)$$

so daß Polynome vom Grad ≤ 3 auf dem Intervall $[0, 1]$ mit der Gewichtsfunktion $w(x)$ exakt integriert werden.

Aufgabe 5:

Sei A eine reelle (n, m)–Matrix.
a) Es seien x_1 und x_2 zwei Lösungen der Gaussschen Normalgleichung zu A. Zeigen Sie: Es gilt $Ax_1 = Ax_2$.
b) Die Zeilen von A bilden ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie: $A^+ = A^*$.
c) Sei A die (n, m)–Nullmatrix. Berechnen Sie A^+.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie mit Hilfe der Rekursionsformel für B–Splines den Wert von $B_{0,3}(3/2)$.

Viel Spaß!