Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 26.11.2002 , 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Es seien $f_{i,l}$, $i = 1 \ldots n$, $l = 1 \ldots m$, stetige Funktionen vom $I\!R^n$ nach $I\!R$. Weiter gelte $f_{i,l}(\lambda x) = f_{i,l}(x)$ für alle $\lambda > 0$, und es sei $\sum_{i=1}^n x_i f_{i,l}(x) = 0$ für alle $x \in I\!R^n$. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $x \in I\!R^n$, $x_i \geq 0$, $x \neq 0$, mit

$$\sum_{l=1}^m f_{i,l}(x) \leq 0,\ i = 1 \ldots m,$$

und

$$\sum_{l=1}^m f_{i,l}(x) = 0 \,\text{falls}\, x_i > 0.$$

Hinweise werden in den Übungen gegeben.

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Newton–Verfahren für die Funktion $f(x) = a - 1/x$ für jedes x_0 mit $|1 - ax_0| < 1$ konvergiert.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Sei $f : I\!R^n \mapsto I\!R^n$ stetig differenzierbar, $f(\overline{x}) = 0$, und $f'(\overline{x})$ invertierbar. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung D von $\overline{x}$, so dass das vereinfachte Newton–Verfahren für jedes x_0 aus D gegen $\overline{x}$ konvergiert.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Sei A eine $(n \times n)$–Matrix. Das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$Ax - \lambda x = 0,\ ||x||_2^2 - 1 = 0.$$

(a) Stellen Sie das zugehörige Newton–Verfahren auf.
(b) Zeigen Sie: Ist λ ein algebraisch einfacher Eigenwert von A (d.h., λ ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A), so konvergiert das Newtonverfahren quadratisch, falls λ_0 und x_0 nah genug an einem Eigenwert λ mit normiertem Eigenvektor $|x|$ liegen.