

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 19.11.2002 , 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für die der euklidischen Norm im \mathbb{R}^n zugeordnete Matrixnorm $\|\cdot\|_2$ einer $n \times n$ -Matrix A gilt

$$\|A\|_2 = \max_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k}.$$

λ_k sind die Eigenwerte von $A^t A$.

Benutzen Sie den Satz: Für jede symmetrische $n \times n$ -Matrix B gibt es eine $n \times n$ -Diagonalmatrix D und eine unitäre $n \times n$ -Matrix U , so daß $B = U^{-1}DU$. Auf der Hauptdiagonalen von D stehen die Eigenwerte von B .

Aufgabe 14: (6 Punkte)

Sei A eine $n \times m$ -Matrix, nicht notwendig mit vollem Rang. Zeigen Sie:

- (a) $AA^+A = A$
- (b) $A^+AA^+ = A^+$
- (c) Ist A eine normale $n \times n$ -Matrix, d.h. $AA^t = A^tA$, so gilt $AA^+ = A^+A$.
- (d) Seien u und v Elemente des \mathbb{R}^n , $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$. Berechnen Sie die Moore–Penrose–Inverse der Matrix uv^t .

Aufgabe 15: (3 Punkte)

Es soll das lineare (2×2) -Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden. Für A und b stehen die Näherungen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zur Verfügung. Es ist bekannt, dass der relative Fehler jedes Eintrags in Matrix und Vektor maximal 1 Prozent beträgt.

- (a) Zeigen Sie: A ist invertierbar.
- (b) Berechnen Sie die Lösung \tilde{x} von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Schätzen Sie den relativen Fehler von \tilde{x} bezogen auf x in einer passenden Norm ab.
- (c) Berechnen Sie die Kondition von \tilde{A} in der 1-Norm, in der euklidischen Norm und in der ∞ -Norm.

Aufgabe 16: (3 Punkte)

Eine Messreihe, bei der ein linearer Zusammenhang zwischen den Größen t und y vermutet wird, liefert folgende Ergebnisse:

t_k	0	1	1	2	3	3
y_k	2.2427	4.1944	4.3565	6.3048	8.1826	8.0074

Bestimmen Sie eine lineare Funktion $y(t) = at + b$ so, dass der Fehler

$$\sum_{k=1}^6 (y(t_k) - y_k)^2$$

minimal wird unter allen linearen Funktionen. Zeichnen Sie die Messpunkte und die Funktion (per Hand oder per Rechner).