Dr. Frank Wübbeling WS 2002/03

**Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik**

Übungsblatt 3 , Abgabe: 12.11.2002 , 11.00 Uhr

---

**Aufgabe 9:** (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die $QR$-Zerlegung einer invertierbaren $(n \times n)$–Matrix $A$ ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Diagonalmatrix mit $|D_{ii}| = 1$, $i = 1 \dots n$, d.h. falls $A = QR = Q'R'$, so gilt $Q = DQ'$.

**Aufgabe 10:** (4 Punkte)
(a) Eine Hessenbergmatrix $A$ erfüllt $A_{i,j} = 0$ für $i > j + 1$. Wieviele Rechenoperationen benötigt man für die $QR$-Zerlegung einer $n \times m$–Matrix nach Householder, $n \geq m$?

(b) Eine Alternative zur Householdermethode ist die Givens–Rotation. Sei $\varphi$ ein Rotationswinkel, $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$. Dann heißt die unitäre $n \times n$–Matrix $G$ Givens–Rotation um den Winkel $\varphi$ in der Ebene $(i, k)$, falls $G$ mit der Einheitsmatrix übereinstimmt außer in folgenden Elementen:

$$G_{i,i} = c,\ G_{i,k} = s,\ G_{k,i} = -s,\ G_{k,k} = c$$

für ein Paar $(i, k)$ mit $1 \leq i, k \leq n$.

Sei $A$ die Hessenbergmatrix aus (a). Bestimmen Sie $\varphi$ so, dass für die Givens–Rotation $G$ um den Winkel $\varphi$ in der $(1, 2)$-Ebene gilt: $GA = B$ und $B$ hat in der ersten Spalte nur Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.

**Aufgabe 11:** (4 Punkte)
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der $QR$-Zerlegung. Geben Sie die Matrizen $Q$ und $R$ und alle Rechenschritte explizit an.

**Aufgabe 12:** (4 Punkte)
Schreiben Sie eine Prozedur $qr$, die die $QR$–Zerlegung einer $n \times m$–Matrix, $n \geq m$, berechnet. Ihr Programm sollte die Matrix $R$ und die Vektoren $v_k$, $k = 1 \dots m$, berechnen.

Schreiben Sie weiter eine Prozedur $qmalx$, die $Q$ auf einen Vektor anwendet (wie in der Vorlesung), und eine Prozedur $qtmalx$, die $Q^t$ auf einen Vektor anwendet.

Testen Sie ihr Programm für die Matrix $n \times m$–Matrix $A$, $A_{i,k} = 1/(i+k-1)$, $n = 100, 200$, $m = 50, 100$. Wenden Sie zum Test Ihr Programm $qmalx$ auf die einzelnen Spalten der Matrix $R$ an und geben Sie die Norm von $QR - A$ aus.