Dr. Frank Wübbeling WS 2002/03

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 2 , Abgabe: 5.11.2002 , 11.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)
(a) Zeigen Sie, daß die Inverse einer linken unteren Dreiecksmatrix der Größe $n \times n$ in $n^3/6 + O(n^2)$ Operationen berechnet werden kann (falls sie existiert). Hinweis: Lösen Sie das Gleichungssystem $LX = I$.
(b) Folgern Sie, daß die Inverse einer beliebigen invertierbaren $n \times n$–Matrix L in $n^3 + O(n^2)$ Operationen berechnet werden kann.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Formulieren Sie den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zur direkten Berechnung der Cholesky–Zerlegung exakt und programmieren Sie ihn. Testen Sie den Algorithmus an den $n \times n$–Matrizen A für n=100, 200, 300:

$$A_{i,k} = \begin{cases} 2, & i = k \\ -1, & i = k+1 \\ -1, & i = k-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie die Norm von $A - LL^t$, L die Cholesky–Zerlegung, aus.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Die invertierbare $n \times n$–Matrix A besitze eine normierte LR–Zerlegung mit $L_{ii} = 1$. Zeigen Sie:

(a) Falls A die Bandbreite m hat, d.h. $A_{i,k} = 0$ für $|i - k| > m$, so haben auch L und R Bandbreite m.
(b) Die LR–Zerlegung von A ist mit $nm^2 + O(nm)$ Operationen und n Divisionen berechenbar.
(c) Die LR–Zerlegung der Matrizen aus Aufgabe 6 ist mit n Operationen und n Divisionen berechenbar.

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Bestimmen Sie von Hand die Cholesky–Zerlegung von A und lösen Sie $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}.$$