

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 1 , Abgabe: 29.10.2002 , 11.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \neq 0$. Zeigen Sie: In jeder Maschinenarithmetik gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 \oplus h) \ominus f(x_0)}{h} = 0.$$

2. In der Vorlesung wurde die Funktion

$$\epsilon(h) := \left| \frac{f(x_0 \oplus h) \ominus f(x_0)}{h} \ominus f'(x_0) \right|$$

für $f(x) = \cos x$ und $x_0 = 1$ vorgestellt.

Erklären Sie, warum ϵ für $h \mapsto 0$ zunächst abnimmt und dann größer wird. Was muss man tun, um den Unterschied zwischen der Ableitung und dem numerischen Differenzenquotienten möglichst klein zu halten?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Programmieren Sie den Gauß-Algorithmus mit und ohne Spaltenpivotsuche. Lösen Sie als Beispiel das System

$$Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A_{i,k} = \frac{1}{i+k-1}, b_i = \sum_k A_{i,k}$$

für $n = 100, 200, 400$ und messen Sie die benötigte Zeit. Schätzen Sie anhand der Komplexität des Gauß-Algorithmus ab, wie lange Ihr Programm zur Lösung des Problems aus der Vorlesung ($n \sim 10^6$) benötigt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0, p = 1, q = 10^{-4}$$

auf einem hypothetischen Rechenwerk mit $b = 10$ und $m = 2$ anhand der Formeln:

1. $x_1 = -p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}, x_2 = -p/2 + \sqrt{p^2/4 - q}$
2. $x_1 = -p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}, x_2 = q/x_1$

und erklären Sie das Ergebnis. Geben Sie die Verstärkungsfaktoren an.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Schätzen Sie die Komplexität der Berechnung einer Determinante anhand Ihrer Definition ab. Geben Sie einen effizienteren Algorithmus an, der mit $n^3/3 + O(n^2)$ Operationen auskommt.