

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 11 , Abgabe: 28.1.2003 , 11.00 Uhr

Aufgabe 41: (4 Punkte)Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $k = 0 \dots n$, $n > 0$ gerade. Sei

$$w(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Zeigen Sie: $w(x_{n/2} - \alpha) = -w(x_{n/2} + \alpha)$.**Aufgabe 42:** (4 Punkte)a) Berechnen Sie die Newton–Cotes–Formel der Ordnung $n = 6$.b) Zeigen Sie, dass für die Ordnung $n = 8$ negative Gewichte auftreten. Hinweis: Berechnen Sie das Gewicht der dritten Stützstelle. Begründen Sie, warum negative Gewichte numerisch bedenklich sind.**Aufgabe 43:** (4 Punkte)Sei $f(x) = \sin x$ in $[0, \pi/4]$. Berechnen Sie das Polynom dritten Grades, das $f(x)$ am besten bezüglich $\|\cdot\|_2$ approximiert. Zeichnen Sie beide Funktionen.**Aufgabe 44:** (4 Punkte)Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist der Vektor $c = (a * b) \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $c_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{k-j}$, $k = 1 \dots n$, wobei $b_l = b_{l+n}$ und $a_l = a_{l+n}$ definiert ist. Zeigen Sie:

a) $\hat{c}_k = n \hat{a}_k \hat{b}_k$

b) Sei $n = 2^m$ für eine ganze Zahl m . Dann kann man c aus a und b in $O(n \log n)$ Rechenoperationen berechnen.