Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 21.1.2003 , 11.00 Uhr

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Sei s ein (kubischer) Spline der Ordnung 4 zu den Knoten x_0 bis x_n auf dem Intervall $[a, b]$, der die reellen Punkte (x_i, y_i), $i = 0 \ldots n$, interpoliert. Sei $g \in C^2([a, b])$ eine weitere interpolierende Funktion mit $g'(a) = s'(a)$ und $g'(b) = s'(b)$. Dann gilt

$$\int_a^b (s''(x))^2 \mathrm{dx} \leq \int_a^b (g''(x))^2 \mathrm{dx}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $g'' = s'' + (g'' - s'')$, rechnen Sie die Integrale aus und verwenden Sie partielle Integration.

Aufgabe 38: (8 Punkte)
a) Schreiben Sie ein Programm, das den FFT–Algorithmus der Vorlesung implementiert für (inverse und direkte) Fouriertransformationen der Länge 2^n. Testen Sie es, indem sie die Fouriertransformation von Vektoren der Form $y_k = e^{2\pi ikl/n}$, l ganz, berechnen und mit der analytischen Lösung vergleichen.
b) Wenden Sie Ihr Programm auf ein einfaches Bildkompressionsproblem an. Auf der Homepage der Vorlesung unter den Übungen und unter /u/wuebbel auf den Rechnern des Fachbereichs finden Sie eine 256x256-Matrix M_1 unter dem Namen "trui.w", die ein Bild darstellt (im Textformat). Unter matlab laden Sie das Bild mit `load 'trui.matrix'` und zeigen Sie es mit an mit `imagesc(trui)` und `colormap('gray')`.

Wenden Sie nun die Fouriertransformation auf alle Zeilenvektoren von M_1 an, und fügen Sie die Transformierten wieder zu einer Matrix M_2 zusammen. Wenden Sie nun die Fouriertransformation auf die Spaltenvektoren von M_2 an und Sie erhalten wie oben eine neue Matrix, M_3.

Setzen Sie nun $(M_3)_{ik} = 0$, falls $|(M_3)_{ik}|$ kleiner ist als ein Schwellenwert ϵ, so daß nur etwa zehn Prozent der Elemente von M_3 übrigbleiben.

Führen Sie nun die inverse Fouriertransformation zunächst auf den Spalten, dann auf den Zeilen von M_3 durch (wie oben). Sie erhalten eine Matrix M_4. Zeigen Sie den Realteil wieder als Falschfarbenbild an und vergleichen Sie mit dem Originalbild.

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Seien $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $y_0, \ldots, y_{n-1}$ reell. Zeigen Sie:

(a) $\hat{x}_{n-k} = \overline{\hat{x}}_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$

(b) Mit $z_k = x_k + iy_k$ gilt

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}\left(\overline{\hat{z}}_{n-k} + \hat{z}_k\right) , \quad \hat{y}_k = \frac{i}{2}\left(\overline{\hat{z}}_{n-k} - \hat{z}_k\right) .$$

(c) Zwei Fourier-Transformationen der Länge n auf reellen Daten kann man bis auf einen gemeinsamen reellen Faktor ausführen durch eine komplexe Fourier-Transformation der Länge n, plus n komplexe Additionen.

Aufgabe 40: (4 Punkte)
Berechnen Sie den Spline $B_{0,4}(x)$ für $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ und stellen Sie ihn graphisch dar.