Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 14.1.2003 , 11.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Die Tschebyscheff–Polynome sind für $n \geq 0$ definiert durch

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x).$$

a) Zeigen Sie für $n \geq 1$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

b) $2^{-n}T_{n+1}(x)$ ist für $n \geq 0$ Polynom vom Grade $n+1$ mit Höchstkoeffizient 1.
c) T_n sind orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, d.h.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x)\mathrm{dx} = 0 \ (m \neq n).$$

Aufgabe 34: (4 Punkte)
a) Seien $x_0, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und $n_0, \ldots, n_m$ ganze Zahlen > 0. Sei $n = n_0 + \ldots + n_m$.

Zeigen Sie: Sind y_{jk}, $0 \leq k < n_j$, $j = 0, \ldots, m$ beliebige komplexe Zahlen, so gibt es genau ein Polynom p vom Grade $\leq n-1$ mit

$$p^{(k)}(x_j) = y_{jk} \ , \qquad 0 \leq k < n_j \ , \quad j = 0, \ldots, m \ .$$

b) Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $y_0, \ldots, y_n$ zugehörige Stützwerte.

Zeigen Sie: Ist $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ irgend eine Permutation der Zahlen $0, \ldots, n$, so ist

$$[y_0, \ldots, y_n] = [y_{\sigma_0}, \ldots, y_{\sigma_n}] \ .$$

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Sei $f \in C^{(n+2)}[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ paarweise verschieden und $p \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, d.h. $p(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$.
Zeigen Sie: Zu jedem j existiert ein $\tilde{x}_j \in [a,b]$ mit

$$f'(x_j) - p'(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_j)}{(n+1)!} \ .$$

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, das das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützstellen und Stützwerten berechnet. Testen Sie Ihr Programm am Runge–Beispiel mit $n = 5, 10, 20$ Stützstellen. Wählen Sie die Stützstellen zunächst äquidistant, dann als Nullstellen der Tschebyscheff–Polynome. Plotten Sie das Ergebnis.