Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: 8.1.2003 , 11.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei $H = (h_{ij})$ eine Hessenbergmatrix und $H = QR$, $R = (r_{ij})$, ihre QR-Zerlegung. Zeigen Sie: $|r_{ii}| \geq |h_{i+1,i}|$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 13.5 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 29 & -16 & -8 \\ 28.25 & -14 & -9 \\ 30.25 & -19 & -6 \end{pmatrix}$$

haben beide den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

a) Berechnen Sie nach der Potenzmethode für beide Matrizen Approximationen x_A, λ_A bzw. x_B, λ_B für λ_1 und einen dazugehörigen Eigenvektor x_1, so daß für die Defekte

$$\begin{array}{rclcrcll} d_A & = & Ax_A - \lambda_A x_A & , & d_B & = & Bx_B - \lambda_B x_B & \text{gilt :} \\ \varepsilon_A & = & \frac{\|d_A\|}{\|x_A\|_2} \leq 0.1 & , & \varepsilon_B & = & \frac{\|d_B\|_2}{\|x_B\|_2} \leq 0.1 & . \end{array}$$

b) Vergleichen Sie die Verhältnisse

$$|\lambda_1 - \lambda_A| / \varepsilon_A \quad , \quad |\lambda_1 - \lambda_B| / \varepsilon_B$$

und erklären Sie das Resultat.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
(a) Was kann man durch Anwendung des Satzes von Gerschgorin über die Lage der Eigenwerte der folgenden Matrix sagen?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

<u>Hinweis:</u> Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auch auf die transponierte Matrix an.
(b) Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grade n und sei $P(\lambda_0) = 0$. Zeigen Sie:

$$|\lambda_0| \leq \max_{i=0,\ldots,n-1} |a_i| + 1 \, .$$

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Seien folgende Stützstellen und Stützwerte gegeben

i	x_i	y_i
0	-1	-1
1	0	3
2	2	11
3	3	27

Sei p_{0123} das zugehörige Interpolationspolynom vom Grad 3.

(a) Berechnen Sie $p_{0123}(x)$ durch die Methode von Lagrange.

(b) Berechnen Sie $p_{0123}(x)$ durch die Methode von Newton.

(c) Berechnen Sie $p_{0123}(1)$ durch die Methode von Neville.

Allen Teilnehmern der Vorlesung ein Frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches Jahr 2003!