Übungen zur Vorlesung Numerik

Übungsblatt 9, Abgabe: Dienstag, 23.06.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2x_2 & - & x_1x_2 & + & 1 \\ x_1^2 & - & x_2 & + & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in D$ besitzt.

(b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\overline{x} - x^k\|_\infty \leq 0.01$ für den Fixpunkt $\overline{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 33: (4 Punkte)
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und sei $f(\overline{x}) = 0$ für ein $\overline{x}$. Zusätzlich sei $f'(\overline{x})$ regulär.
Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung D von $\overline{x}$ wo der Fixpunktoperator des Newton-Verfahrens wohldefiniert ist und wo die Voraussetzungen des Banachschen-Fixpunktsatzes erfüllt sind.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{für } x \geq 0, \\ -|x|^\alpha, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ Startwert des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle $\bar{x} = 0$ von f.

(a) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert das Newton-Verfahren?

(b) Was lässt sich über die Konvergenzgeschwindigkeit sagen?

Aufgabe 35: (Programmieraufgabe, Abgabe: 30.06.2009, 12.00 Uhr)
Programmieren Sie das n–dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle $\overline{x}$ einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

(a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslöung des folgenden chemischen Systems gesucht:

$$\begin{array}{rcccccr} CH_4 & + & \frac{1}{2}O_2 & \rightleftharpoons & CO & + & 2H_2 \\ CH_4 & + & H_2O & \rightleftharpoons & CO & + & 3H_2 \\ H_2 & + & CO_2 & \rightleftharpoons & CO & + & H_2O\,. \end{array}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1,\ldots,x_7)=0$ für die Konzentration $x\in\mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1,\ldots,x_7)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{x_6}{x_7} \\ x_3+x_4+2x_5-\frac{2}{x_7} \\ x_1+x_2+x_5-\frac{1}{x_7} \\ -28837x_1-139009x_2-78213x_3+18927x_4 \\ \qquad +8427x_5+\frac{13492}{x_7}-10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-1 \\ 400x_1x_4^3-1.7837\cdot 10^5x_3x_5 \\ x_1x_3-2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1=x_4=x_6=0.5$, $x_2=x_3=x_5=0$, $x_7=2.0$.

(b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x,y)=100(y-x^2)^2+(1-x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x},\bar{y})=(1,1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x,y):=\nabla h(x,y)=0$ im Punkt $(x_0,y_0)=(-0.5,0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x,y)$ auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\parallel f(x)\parallel_2\leq 10^{-10}$. Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k=-f(x^k)\,,\qquad x^{k+1}=x^k+d^k\,.$$