

Übungen zur Vorlesung Numerik

Übungsblatt 9, Abgabe: Dienstag, 23.06.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 32: (4 Punkte)Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x_2 & - & x_1x_2 & + & 1 \\ x_1^2 & - & x_2 & + & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$ besitzt.
- (b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\bar{x} - x^k\|_\infty \leq 0.01$ für den Fixpunkt $\bar{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 33: (4 Punkte)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und sei $f(\bar{x}) = 0$ für ein \bar{x} . Zusätzlich sei $f'(\bar{x})$ regulär.

Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung D von \bar{x} wo der Fixpunktoperator des Newton-Verfahrens wohldefiniert ist und wo die Voraussetzungen des Banachschen-Fixpunktsatzes erfüllt sind.

Aufgabe 34: (4 Punkte)Sei $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{für } x \geq 0, \\ -|x|^\alpha, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

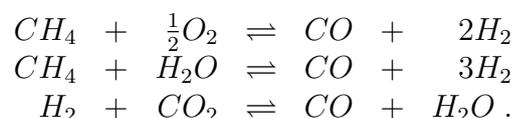
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ Startwert des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle $\bar{x} = 0$ von f .

- (a) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert das Newton-Verfahren?
- (b) Was lässt sich über die Konvergenzgeschwindigkeit sagen?

Aufgabe 35: (Programmieraufgabe, Abgabe: 30.06.2009, 12.00 Uhr)

Programmieren Sie das n -dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle \bar{x} einer C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

- (a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslösung des folgenden chemischen Systems gesucht:



Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1, \dots, x_7) = 0$ für die Konzentration $x \in \mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1, \dots, x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \quad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_7 = 2.0$.

(b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$ im Punkt $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x, y)$ auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\|f(x)\|_2 \leq 10^{-10}$. Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + d^k.$$