

Übungen zur Vorlesung Numerik

Übungsblatt 6, Abgabe: Dienstag, 26.05.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 20: (4 Punkte)Zur Berechnung der Varianz eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ liegt folgende Formel vor:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

wobei $\bar{x} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)$ der Mittelwert der x_i ist. Berechnen Sie den Stabilitätsindikator für diesen Algorithmus. Benutzen Sie zur Berechnung der relativen Konditionszahl die 1-Norm.

Aufgabe 21: (5 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $T : X \rightarrow X$ stetig und linear mit $\|T\| < 1$. Sei S definiert durch

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Zeigen Sie

- $S(x)$ ist für alle $x \in X$ wohldefiniert.
- S ist linear und stetig und $\|S\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.
- $Id - T$ ist bijektiv und es ist $S = (Id - T)^{-1}$.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm. Sei die Störung $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben mit $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ und $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des gestörten Gleichungssystems $(A + \Delta A)\bar{x} = \bar{b} = b + \Delta b$. Zeigen Sie:

- $A + \Delta A$ ist regulär.
- Für den relativen Fehler gilt $\frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 21 mit einer geeigneten Wahl von T .

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für Näherungen \bar{A} , \bar{b} , \bar{x} von A , b , x gelte

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b} \quad \text{mit} \quad \|\bar{b} - b\| \leq \frac{1}{800} .$$

Wie groß darf der Fehler $\|\bar{A} - A\|$ sein, damit $\|\bar{x} - x\| \leq 0.3$ gilt?
Berechnen Sie die Abschätzung für den Fehler in der

- a) Supremumsnorm.
- b) Spektralnorm / Euklidische Norm für x .