Übungen zur Vorlesung Numerik

Übungsblatt 2, Abgabe: Dienstag, 28.04.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Die Inverse einer *Frobenius-Matrix*

$$\begin{array}{cc} L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -l_{n,k} & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k\text{te-Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ k\text{te-Spalte} \end{array} & \end{array}$$

entsteht durch Vorzeichenwechsel in den Elementen l_{ik}.

(b) Das Produkt von unteren (oberen) Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere (obere) Dreiecksmatrix.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & & & \\ c_2 & a_2 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

wobei sich A durch Gaußelimination zerlegen lässt in $A = LR$.

(a) Wie sehen die Matrizen L und R aus?

(b) Leiten Sie die Anzahl der Rechenoperationen her, die das Eliminationsverfahren (ohne Spaltenpivotsuche) zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, benötigt.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

mit Spaltenpivotsuche. Führen Sie dabei alle Zwischenschritte auf.

b) Berechnen Sie dann mit Hilfe der obigen Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für $b = (2, 1, 2, -1)^T$.

Aufgabe 7: (Programmieraufgabe, Abgabe: Dienstag, 05.05.09, , 12.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Es soll sowohl die Berechnung mit als auch ohne Spaltenpivotsuche möglich sein.
Die Matrix A und der Vektor b sollen übergeben werden. Nach dem Ablauf des Programms soll in der Matrix A die LR-Zerlegung gespeichert sein, in dem Vektor b die Lösung x. Die Permutationsmatrix soll dabei in einem Vektor ausgegeben werden.

(a) Testen Sie das Programm an den Aufgaben 1 und 2 vom Übungsblatt 1 sowie an Aufgabe 4.

(b) Berechnen Sie mit und ohne Spaltenpivotsuche die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad l = 6, \ldots, 20\,.$$

(c) Vergleichen Sie die Rechenzeit Ihres Algorithmus mit der Rechenzeit der Matlab-Routine $A\backslash b$. Zur Zeitmessung benutzen Sie die Matlab-Funktionen `tic` und `toc`. Machen Sie sich mit dem Matlab-Befehl `rand` vertraut, um eine Zufallsmatrix A und einen Zufallsvektor b zu erzeugen. Wählen Sie $n = 5, 10, 50, 100, 1000$.
Die Matlab-Routine $A\backslash b$ arbeitet parallelisiert, d.h. auf mehreren Rechenkernen gleichzeitig. Um einen genauen Vergleich machen zu können sorgen Sie am besten mit dem Befehl » `maxNumCompThreads(1)` dafür, dass nur auf einem Kern gerechnet wird.

Bitte geben Sie die Programmieraufgabe mit Ergebnis in ausgedruckter Form ab und senden Sie beides zusätzlich per E-mail an Ihren Übungsgruppenleiter.