

Übungen zur Vorlesung Numerik

Übungsblatt 12, Abgabe: Dienstag, 14.07.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 44: (4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie mit der Newton'schen Methode das Polynom $p \in \mathbb{P}_2$, welches die folgenden Daten interpoliert:

$$\begin{array}{c|c|c|c} t_i & -2 & -1 & 1 \\ \hline f_i & 0 & 3 & -3 \end{array}$$

- (b) Das Polynom $p_n \in \mathbb{P}_n$ interpoliere die Funktion $f(x) = xe^x$ im Intervall $[0, c] \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ in den Punkten $x_j = j \cdot \frac{c}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_{\infty} = 0.$$

Aufgabe 45: (8 Punkte)

Für eine Knotenfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $t_i \leq t_{i+1}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$ seien für $i \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_0$ die B -Splines $N_{ik} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad k rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} N_{i0} &:= \begin{cases} 1 & \text{für } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ N_{ik} &:= \omega_{ik}(x)N_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x))N_{i+1,k-1}(x), \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \omega_{ik}(x) := \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} & \text{für } t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die folgenden Aufgaben sei die Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ streng monoton wachsend.

- (a) Berechnen und skizzieren Sie N_{i1} , $N_{i+1,1}$ und N_{i2} .
- (b) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:
- $N_{ik}|_{[t_j, t_{j+1})} \in \mathbb{P}_k$,
 - $\text{supp}(N_{ik}) = [t_i, t_{i+k+1}]$,
 - $N_{ik} \geq 0$, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} N_{ik}(x) = 1$ (Zerlegung der Eins).
- c) Zeigen Sie:

- i) Für $k > 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} N_{ik}(x) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(x) - \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x).$$

- ii) $N_{ik} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $k \geq 1$.

Hinweis: Verwenden Sie für i), dass für $k > 1$ gilt

$$\frac{\omega_{ik}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} = \frac{\omega_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} \frac{1 - \omega_{ik}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} = \frac{1 - \omega_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}.$$

Aufgabe 46: (4 Punkte)

Gegeben seien folgende Messwerte

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 2 & 4 & -2 & 2 \end{array}.$$

Stellen Sie das Gleichungssystem des kubischen Splines $s(x)$ mit Randbedingungen $s''(-1) = s''(2) = 0$ zu diesen Daten auf und berechnen Sie $s(0.5)$.

Aufgabe 47: (4 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^2 -x^3 + 2x^2 dx$$

mit $h = 0.4$

- (a) nach der zusammengesetzten Trapezregel,
- (b) nach der zusammengesetzten Simpsonregel,
- (c) nach der zusammengesetzten Newtonschen $\frac{3}{8}$ -Regel,
- (d) exakt. Geben Sie dazu entweder Ihre schriftliche Lösung oder Ihren Programmcode mit ab.