

Übungen zur Vorlesung Numerik

Übungsblatt 10, Abgabe: Dienstag, 30.06.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Bei der Bahnbestimmung von Planeten ist die "KEPLERsche Gleichung" zu lösen:

Gesucht wird die "exzentrische Anomalie" \bar{x} als Lösung der Gleichung

$$x = g(x) = e \sin(x) + \frac{2\pi}{u}t .$$

Dabei ist u die Umlaufzeit, t die seit dem Perihelddurchgang vergangene Zeit in Tagen und e die numerische Exzentrizität der Bahnellipse.Für die realistischen Werte $e = 0.1$ und $\frac{2\pi t}{u} = 0.85$ und $x_0 = 0.85$ berechne man die ersten 3 Iterationen zur Lösung obiger Gleichung mit Hilfe

- der Fixpunktiteration,
- des Newton-Verfahrens.

Geben Sie in jedem Iterationsschritt die Näherung für \bar{x} an. (Zum Vergleich: $\bar{x} = 0.9301722932$)**Aufgabe 37:** (4 Punkte)Konvergenzverbesserung nach AITKEN:Die Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ sei linear konvergent gegen $\bar{x} \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$x_{k+1} - \bar{x} = (q + \varepsilon_k)(x_k - \bar{x}), \quad |q| < 1, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0 .$$

Zeigen Sie: Gilt $x_k \neq \bar{x}$, so ist für genügend großes k die Folge

$$z_k := x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

erklärt und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_k - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} = 0 .$$

Hinweis: Setzen Sie $e_k = x_k - \bar{x}$ und überlegen Sie

$$x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k, \quad x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = e_{k+2} - 2e_{k+1} + e_k .$$

Aufgabe 38: (4 Punkte)Sei A eine (n, n) -Matrix. Das Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$ ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$Ax - \lambda x = 0, \quad \frac{1}{2}(1 - \|x\|_2^2) = 0$$

Stellen Sie das zugehörige Newton-Verfahren auf.

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei I die Einheitsmatrix und $v \in \mathbb{R}^n$ mit der Transponierten v^T .

Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante einer Householder-Matrix

$$Q = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}.$$