Vorlesungsskript
Gewöhnliche Differentialgleichungen

F. Natterer

Institut für Numerische
und instrumentelle Mathematik

SS 1998, Mo/Do 15-17, M3

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundbegriffe

Unter einer Differentialgleichung verstehen wir eine Beziehung zwischen einer Funktion und einigen ihrer Ableitungen. Z.B. sind

$$
\begin{aligned}
y' &= y && (1.1)\\
y^2 + y'^2 &= c && (1.2)\\
y'' + \omega^2 y &= 0 && (1.3)\\
u_t &= u_{xx} && (1.4)
\end{aligned}
$$

Differentialgleichungen.

Die höchste auftretende Ableitungsordnung heißt Ordnung der Differentialgleichung. Treten nur Ableitungen nach einer einzigen unabhängigen Variablen auf, so heißt die Differentialgleichung gewöhnlich, andernfalls partiell. In dieser Vorlesung werden wir so gut wie ausschließlich nur gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln. Die Differentialgleichungen (1.1) - (1.2) sind also von der Ordnung 1, (1.3) - (1.4) von der Ordnung 2, (1.1) - (1.3) sind gewöhnlich, (1.4) partiell.

Unter einer Lösung einer Differentialgleichung verstehen wir eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion, welche die Differentialgleichung in einem gewissen Gebiet der unabhängigen Variablen identisch erfüllt. So ist z.B. $y = ce^x$ für jedes $c \in \mathbb{R}^1$ Lösung von (1.1) und $y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ für a, $b \in \mathbb{R}^1$ Lösung von (1.3). (1.2) hat für $c < 0$ überhaupt keine Lösung, für $c = 0$ nur die Lösung $y = 0$, für $c = a^2 > 0$ die Lösungen $y = a \cos x$, $y = a \sin x$. Wir sehen also, daß die Lösungen von Differentialgleichungen i. allg. nicht eindeutig bestimmt sind, und manchmal gibt es überhaupt keine. Um die Lösungen eindeutig festzulegen, spezifiziert man Zusatzbedingungen, wie etwa Anfangsbedingungen. Schreibt man etwa für (1.1) die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ vor, so ist $y = e^x$ die einzige Lösung. Entsprechend kann man die Lösung von (1.3) durch die Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ eindeutig festlegen, nämlich zu $y = \cos \omega x$.

Allgemein hat eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung die Gestalt

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.5}$$

(implizite Form) oder

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.6}$$

(explizite Form). Beim Anfangswertproblem spezifiziert man noch zusätzlich die Werte der Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$ an einem Punkt x_0:

$$y^{(\nu)}(x_0) = c_\nu \ , \qquad \nu = 0, \ldots, n-1 \ . \tag{1.7}$$

Das Gebiet der unabhängigen Variablen, in denen wir die Differentialgleichungen und deren Lösungen betrachten, wird meistens nicht explizit angegeben oder versteht sich von selbst.

Statt einzelner Differentialgleichungen für eine einzige Funktion y werden auch Systeme von Differentialgleichungen für mehrere Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ betrachtet. Z.B. ist

$$y_1' = y_2 \ , \qquad y_2' = -y_1$$

ein solches System. Wir werden Systeme durch Benutzung der Vektorschreibweise ebenfalls in der Form (1.5) bzw. (1.6) schreiben.

1.2 Einige Anwendungen von Differentialgleichungen

Mit Hilfe von Differentialgleichungen kann man viele Vorgänge aus Physik, Wirtschaft, Biologie, Chemie und anderen Bereichen modellieren. Wir geben einige Beispiele.

1. Wachstum einer Population Sei $P(t)$ die Größe einer Population zur Zeit t. Für kleine Zeitinkremente Δt wird dann gelten

$$P(t+\Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t$$

mit einer reellen Zahl α. Für $\Delta t \to 0$ entsteht daraus die Differentialgleichung

$$P'(t) = \alpha P(t)\ . \tag{2.1}$$

Ist die Größe der Population zur Zeit $t = 0$ bekannt, etwa P_0, so haben wir zusätzlich die Anfangsbedingung

$$P(0) = P_0 \tag{2.2}$$

(2.1 - 2.2) stellen ein Anfangswertproblem für eine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung dar. Sie besitzt die Lösung

$$P(t) = e^{\alpha t} P_0\ . \tag{2.3}$$

In Teil II werden wir sehen, daß es keine weiteren Lösungen der Anfangswertaufgabe gibt. (2.3) beschreibt das Wachstum der Population. α ist der Wachstumskoeffizient.

Die (2.1) zugrundeliegende Annahme, daß die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zur Größe ist, kann nur in gewissen Grenzen gelten. Bei Annäherung an eine Größe K wird die Wachstumsgeschwindigkeit abnehmen. Dann ist das Modell

$$P'(t) = \lambda P(K-P) = \gamma P - \tau P^2 \tag{2.4}$$

realistischer. Es heißt logistische Differentialgleichung. Eine Lösung von (2.4) mit $P(0) = P_0$ ist

$$P(t) = K\left(1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-\lambda K t}\right)^{-1}\ , \tag{2.5}$$

und dies ist wieder die einzige Lösung des Anfangswertproblems. Der Graph von P ist für $K = 4, P_0 = 0.5$ und $\lambda = 0.05$ in Figur 1. dargestellt. Man sieht deutlich das Sättigungsverhalten mit dem Sättigungswert bei K.

Daß (2.5) tatsächlich (2.4) löst, kann man unmittelbar bestätigen. Wie wir aber (2.5) gefunden haben, werden wir in Teil III erklären.

2. Fall eines Massenpunktes

Sei $x(t)$ die Position eines Massenpunktes der Masse m über dem Erdboden zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ sei $x(t) = x_0$ und $\dot{x}(t) = v_0$.

(a) Der Massenpunkt befinde sich in geringer Höhe über dem Erdboden, so daß die Erdbeschleunigung g an der Oberfläche maßgebend ist. Der Luftwiderstand werde vernachlässigt. Dann ist

$$\ddot{x}(t) = -g \ . \tag{2.6}$$

Die Lösung dieser "Differentialgleichung" ist

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 g + c_1 + c_2 t$$

mit Konstanten c_1, c_2. Wegen der Anfangsbedingungen ist $c_1 = x_0$ und $c_2 = v_0$, also

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}t^2 g + v_0 t \ .$$

Dies ist das bekannte Gesetz des freien Falls.

(b) Wir berücksichtigen nun den Luftwiderstand. Dieser ist proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$. Aus (2.6) wird damit

$$\ddot{x} = -g - \alpha\dot{x} \ .$$

Diese Differentialgleichung hat für $\alpha \neq 0$ als Lösung

$$x(t) = -\frac{g}{\alpha}t + c_1 + c_2 e^{-\alpha t} \ .$$

Die Konstanten c_1, c_2 bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

Man erhält

$$x(t) = x_0 - \frac{g}{\alpha}t + (\frac{g}{\alpha^2} + \frac{v_0}{\alpha})(1 - e^{-\alpha t}) \ .$$

(c) Der Massenpunkt ist nicht nahe der Erde, so daß die konstante Erdbeschleunigung g durch $\gamma M/x^2$ (γ Gravitationskonstante, M Erdmasse) ersetzt werden muß. Unter Vernachlässigung der Luftreibung haben wir dann anstelle von (2.6)

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma M}{x^2} \ .$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nicht einfach zu bestimmen. Eine spezielle Lösung ist aber

$$x(t) = at^{2/3} \ , \quad a = (9\gamma M/2)^{1/3} \ ,$$

wie man leicht nachrechnet. Sie entspricht einer Bewegung, welche von der Erde wegführt (d.h. $x(t) \to \infty$ für $t \to \infty$), aber so, daß die Geschwindigkeit für $t \to \infty$ Null wird (d.h. $\dot{x}(t) \to 0$ für $t \to \infty$).

Sei ρ der Erdradius, bei dem die Bewegung startet, und zwar zur Zeit t_ρ, d.h.

$$\rho = at_\rho^{2/3} \ , \qquad t_\rho = (\rho/a)^{3/2} \ .$$

Die Geschwindigkeit v_ρ zur Zeit t_ρ ist

$$v_\rho = \dot{x}(t_\rho) = \frac{2}{3}at_\rho^{-1/3} = \frac{2}{3}a(\rho/a)^{-1/2} \ .$$

Für die Werte $\rho = 6.370 \cdot 10^8$ cm, $\gamma = 6.68510^{-8}$ dyn $\cdot$ cm$^2 \cdot g^{-2}$, $M = 5.97 \cdot 10^{27} g$ ergibt sich die "Fluchtgeschwindigkeit" $v_\rho = 11.2 \frac{km}{sec}$.

3. Kurvenscharen

Häufig kann man für Kurvenscharen einheitlich Differentialgleichungen angeben. Ist

$$g(x, y, c) = 0 \tag{2.7}$$

eine solche Kurvenschar mit Parameter c und ist $y = y(x)$ eine Kurve dieser Schar, so gilt

$$g_x(x, y, c) + y'(x) g_y(x, y, c) = 0 \ . \tag{2.8}$$

Wir wollen nun annehmen, daß sich (2.7) nach c auflösen läßt, also $c = h(x, y)$. Setzt man dies in (2.8) ein, so entsteht die Differentialgleichung

$$g_x(x, y, h(x, y)) + y' g_y(x, y, h(x, y)) = 0 \ .$$

Betrachten wir zum Beispiel die Schar der Kreise vom Radius r, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, also

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2 \ .$$

Für einen solchen Kreis $y = y(x)$ ist

$$2(x - c) + 2yy' = 0 \ ,$$

also

$$(x - c)^2 = y^2 {y'}^2 \ .$$

Elimination von $(x - c)^2$ ergibt

$$y^2 (1 + {y'}^2) = r^2 \ .$$

Jeder Kreis $y = \pm\sqrt{r^2 - (x - c)^2}$ löst diese Differentialgleichung.

1.3 Geometrische Interpretation

Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Jedem Punkt (x, y) wird eine Steigung $f(x, y)$ zugeordnet. Das Tripel $(x, y, f(x, y))$ heißt Linienelement, die Gesamtheit der Linienelemente heißt Richtungsfeld.

Beispiel: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$

Das Lösen einer Differentialgleichung bedeutet also das Aufsuchen von Kurven, die in das Richtungsfeld passen, d.h. die an jedem Punkt die von dem Richtungsfeld vorgegebene Steigung haben. Auf dieser Einsicht beruht ein einfaches Verfahren zur näherungsweisen Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = c$:

Sei $x_k = kh, \;\; k = 0, 1, \ldots$, mit der Schrittweite $h > 0$. Sei eine Näherung y_k für $y(x_k)$ schon bekannt. (Für $k = 0$ ist $y_0 = c$). Dann wählt man für $y(x_{k+1})$ den Wert der Geraden durch (x_k, y_k) mit Steigung $f(x_k, y_k)$:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \; , \qquad k = 0, 1, \ldots \; .$$

Man nennt dies das Euler'sche Polygonzug-Verfahren.

Beispiel: Die Differentialgleichung sei $y' = \lambda y$, $y(0) = c$.

Die Lösung ist $y(x) = ce^{\lambda x}$. Das Polygonzug-Verfahren lautet

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = (1 + \lambda h)y_k \; ,$$

also

$$y_k = c(1 + \lambda h)^k \; .$$

Sei nun für ein $x > 0 \quad x_k = hk = x$. Dann ist

$$y_k = c(1 + \lambda \frac{x}{k})^k \; .$$

Für $h \to 0$ gilt $k \to \infty$, und man bekommt

$$\lim_{k \to \infty} y_k = ce^{\lambda x} = y(x) \; .$$

Für kleine h liefert das Polygonzug-Verfahren also tatsächlich eine Näherung für den korrekten Wert.

1.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Solche Differentialgleichungen haben die Form

$$y' = a(x)y + s(x) \; . \tag{4.1}$$

Für $s = 0$ heißt (4.1) homogen, andernfalls inhomogen. Wir wollen a, s als stetig veraussetzen.

Satz 1.4.1 *Sei $A(x) = \int^x a dx$ eine Stammfunktion von a. Dann ist*

$$y = ce^A \tag{4.2}$$

für jedes konstante c eine Lösung von (4.1) für $s = 0$. Umgekehrt ist jede Lösung von (4.1) für $s = 0$ von dieser Form.

Beweis: $y' = ay$ folgt sofort durch Differentiation von (4.2). Ist umgekehrt z eine Lösung von (4.1) für $s = 0$, so ist für $c \neq 0$

$$\frac{d}{dx}\frac{z}{y} = \frac{z'y - zy'}{y^2} = \frac{azy - azy}{y^2} = 0 ,$$

also z/y konstant und damit z von der Form (4.2).

□

Folgerung: Die Anfangswertaufgabe

$$y' = a(x)y \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} .$$

Beispiele:

1) $y' = (\sin x)y$ hat die allgemeine Lösung $y = ce^{-\cos x}$. Die Anfangswertaufgabe $y(0) = 1$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $y = e^{1-\cos x}$.

2) $y' = \frac{1}{x}y$ hat für $x > 0$ die allgemeine Lösung $y = cx$. Die Anfangswertaufgabe $y(1) = 2$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $y = 2x$.

Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung (4.1). Ist y_p irgendeine Lösung von (4.1) und y eine weitere, so gilt

$$(y - y_p)' = y' - y_p' = ay + s - (ay_p + s) = a(y - y_p) .$$

$y - y_p$ ist also Lösung der homogenen Gleichung (4.1). Nach Satz 1 ist daher

$$y = y_p + ce^A \tag{4.3}$$

Dies erinnert an die lineare Algebra: Zwei Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems unterscheiden sich nur um eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Um also die allgemeine Lösung von (4.1) zu finden, müssen wir nach (4.3) nur eine partikuläre Lösung y_p finden. Für diese machen wir den Ansatz

$$y_p = c(x)e^A \ .$$

Man nennt dies: Variation der Konstanten. Setzen wir dieses y_p in (4.1) ein, so entsteht

$$c'e^A + ace^A = ace^A + s$$

oder

$$c' = se^{-A} \ .$$

Damit haben wir

Satz 1.4.2 *Sei c eine Stammfunktion von se^{-A}. Dann ist*

$$y = ce^A$$

Lösung von (4.1). Umgekehrt ist jede Lösung von (4.1) von dieser Form.

Folgerung: Das Anfangswertproblem (4.1) mit $y(x_0) = y_0$ hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(\xi)d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} s(\xi) e^{\int_\xi^x a(\eta)d\eta} d\xi$$

Beispiele:

1) $y' = (\sin x)y + \sin x, \quad y(0) = 0.$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y = ce^{-\cos x}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
y_p &= c(x)e^{-\cos x} \\
c'e^{-\cos x} + c\sin x e^{-\cos x} &= c\sin x e^{-\cos x} + \sin x \\
c' &= \sin x e^{\cos x} \\
c(x) &= -e^{\cos x} \\
y_p &= -1 \, .
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y = -1 + ce^{-\cos x}$$

Einarbeitung der Anfangsbedingung:

$$y = -1 + e^{1-\cos x} \, .$$

2) In vielen Fällen muß man die Variation der Konstanten nicht durchführen, da man eine partikuläre Lösung erraten kann. Ist z.B.

$$a = \text{konst} \; \neq 0 \, , \quad s(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \, ,$$

so kann man für y_p immer eine Funktion der Form

$$y_p = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m \tag{4.4}$$

machen. Einsetzen von (4.4) in (4.1) ergibt

$$A_1 - aA_0 + (2A_2 - aA_1)x + \cdots + (mA_m - aA_{m-1})x^{m-1} - aA_m x^m$$
$$= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \, .$$

Hieraus kann man $A_0, \ldots, A_m$ rekursiv bestimmen

$$\begin{aligned}
A_m &= -\frac{1}{a} b_m \\
A_{m-1} &= -\frac{1}{a}(b_{m-1} - mA_m) \\
&\;\vdots \\
A_0 &= -\frac{1}{a}(b_0 - A_1) \, .
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Existenz- und Eindeutigkeitssätze

2.1 Fixpunktsätze

Sei B ein Banachraum und $D \subseteq B$. Sei $T : D \to D$ eine Abbildung. Man sagt, $x \in D$ sei Fixpunkt von T, wenn $Tx = x$.

Wir werden zwei Sätze kennenlernen, die die Existenz von Fixpunkten unter gewissen Voraussetzungen behaupten. Beide werden zu Existenzsätzen für das Anfangswertproblem führen.

Eine Abbildung T heißt kontrahierend in D, falls es ein $q < 1$ gibt mit

$$\|Tx - Ty\| \le q\|x - y\| , \qquad \forall \; x, y \in D .$$

Satz 2.1.1 *(Fixpunktsatz von Banach, Kontraktionssatz):*

Sei $D \subseteq B$ abgeschlossen und nicht leer, und sei $T : D \to D$ kontrahierend in D. Dann besitzt T in D genau einen Fixpunkt.

Beweis: Sei $x_0 \in D$. Wir setzen $x_{k+1} = Tx_k,\; k = 0, 1, \ldots$. Es gilt $x_k \in D$ und

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|Tx_k - Tx_{k-1}\| \le q\|x_k - x_{k-1}\| ,$$

also

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le q^k \|x_1 - x_0\| \;, \qquad k = 0, 1, \dots \;.$$

Für alle m, n mit $m > n$ ist nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|\sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k)\| \le \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\le \sum_{k=n}^{m-1} q^k \|x_1 - x_0\| \le \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\| \;. \end{aligned}$$

Also gilt $x_n - x_m \to 0$ für n, $m \to \infty$. (x_n) ist also eine Cauchy-Folge in B und besitzt daher einen Grenzwert $x \in B$. Da D abgeschlossen ist, gehört x sogar zu D. Da T sogar stetig ist, gilt

$$Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_k = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x \;,$$

d.h. x ist Fixpunkt von T in D. Wäre y ein weiterer solcher Fixpunkt, so wäre

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \le q\|x - y\| \;,$$

also $\|x - y\| = 0$ wegen $q < 1$.

□

Der zweite Fixpunktsatz ist sehr viel anspruchsvoller. Er macht Gebrauch von zwei weiteren Begriffen. Eine Menge D in einem linearen Raum B heißt konvex, wenn mit jedem Paar x, $y \in D$ die ganze Verbindungsstrecke von x und y in D liegt. Anders ausgedrückt: D ist konvex, falls mit x, y auch $\lambda x + (1-\lambda)y$ in D liegt für $0 \le \lambda \le 1$. Eine Menge D in einem normierten Raum heißt relativ kompakt, wenn jede Folge in D eine konvergente Teilfolge enthält.

Satz 2.1.2 *<u>(Schauder'scher Fixpunktsatz)</u>: Sei $D \subseteq B$ abgeschlossen und konvex, und sei $T : D \to D$ stetig. Ist $T(D)$ relativ kompakt, so besitzt T in D einen Fixpunkt.*

Beweis: Siehe etwa Heuser, Analysis II, S. 608.

Für endlich-dimensionale Räume nennt man Satz 1.2 auch den Satz von Brouwer. Wir interessieren uns vor allem für den unendlich-dimensionalen Raum $B = C[a,b]$ mit der Norm

$$\|f\| = \operatorname{Max}_{a \le x \le b} |f(x)| \; .$$

Eine Menge $D \subseteq C[a,b]$ heißt gleichgradig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \; ,$$

falls $|x_1 - x_2| \le \delta$ für alle $f \in D$. Ein Beispiel wäre etwa die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit $|f'| \le M$.

Satz 2.1.3 *(Arzelà-Ascoli): Eine Teilmenge $D \subseteq C[a,b]$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

Beweis: Heuser, Lehrbuch der Analysis I, S. 563.

2.2 Der Satz von Peano

Wir wollen zeigen, daß die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y) \; , \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

für stetiges f mindestens eine Lösung besitzt. Genauer gilt:

Satz 2.2.1 *(Existenzsatz von Peano):*

Sei f stetig in einer Umgebung von (x_0, y_0). Dann gibt es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine in I stetig differenzierbare Funktion y mit

$$y'(x) = f(x, y(x)) \; , \quad x \in I \; , \quad y(x_0) = y_0 \; . \tag{2.2}$$

Beweis:

1) Umformung in eine Integralgleichung.

Ist y wie in (2.2), so folgt durch Integration

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \ , \qquad x \in I \ . \tag{2.3}$$

Ist umgekehrt y eine in I stetige Funktion mit (2.3), so folgt zunächst einmal $y \in C^1(I)$ und dann (2.2). Anstelle einer stetig differenzierbaren Lösung von (2.2) können wir also genauso gut eine stetige Lösung von (2.3) suchen.

2) Wir nehmen ein abgeschlossenes Intervall I um x_0 und setzen $B = C(I)$. Ebenso wählen wir ein Intervall J um y_0. I und J seien so klein, daß f in $I \times J$ stetig ist, insbesondere also $|f| \leq M$ in $I \times J$. D enthalte alle Funktionen y aus B, welche auf I Werte in J annehmen. Dann ist

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

eine auf D erklärte Abbildung. Es gilt

$$|(Ty)(x) - y_0| \leq |x - x_0|M \ .$$

Man kann also I so wählen, daß $T(D) \subseteq D$ gilt. Da f auf $I \times J$ sogar gleichmäßig stetig ist, ist T stetig als Abbildung von B nach B. Offenbar ist $T(D)$ beschränkt in B. Wir zeigen, daß $T(D)$ gleichgradig stetig ist. In der Tat ist

$$\begin{aligned} |(Ty)(x_1) - (Ty)(x_2)| \ &\leq \ |\int_{x_1}^{x_2} f(\xi, y(\xi))d\xi| \\ &\leq \ |x_1 - x_2|M \end{aligned}$$

unabhängig von y.

3) T und D erfüllen alle Voraussetzungen des Schauder'schen Fixpunktsatzes 1.2. Also gibt es ein $y \in D$ mit $Ty = y$ oder (2.3). Dieses y ist Lösung der Anfangswertaufgabe (2.1).

Beispiel: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$. Mit Hilfe des Ansatzes $y = cx^\alpha$ findet man die Lösung $y = \frac{1}{4}|x|x$. Als weitere Lösung hat man natürlich $y = 0$. Die Anfangswertaufgabe besitzt also - entsprechend dem Satz von Peano - eine Lösung. Diese ist jedoch nicht eindeutig bestimmt. Die Lösungen der Differentialgleichung verzweigen sich bei $(0,0)$. Wir werden sehen, daß die Punkte der x-Achse die einzigen Verzweigungspunkte von Lösungen dieser Differentialgleichung sind.

2.3 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir werden nun die Voraussetzungen an f so verschärfen, daß die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{3.1}$$

genau eine Lösung besitzt. Wir sagen, f erfülle in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Lipschitz-Bedingung, wenn es eine Konstante L gibt, so daß

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{3.2}$$

für alle (x,y_1), $(x,y_2) \in A$.

Wir sagen, f erfülle in A eine lokale Lipschitz-Bedingung, wenn es für jeden Punkt von A eine Umgebung gibt, in der f eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist hinreichend, daß $f \in C^1(A)$.

Satz 2.3.1 *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf): Sei f stetig in einer Umgebung von (x_0,y_0) und erfülle dort eine Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine in I stetig differenzierbare Funktion y mit*

$$y'(x) = f(x,y(x)) \; , \quad x \in I \; , \quad y(x_0) = y_0 \; .$$

y ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Der Beweis verläuft wie beim Satz von Peano, nur wird jetzt der Kontraktionssatz verwendet.

1) Wie bei Peano suchen wir eine stetige Lösung von

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi\ , \quad x \in I\ . \tag{3.3}$$

2) Wir wählen die Intervalle I, J zunächst wie bei Peano und definieren die Abbildung $T : D \to D$ wie dort. f erfüllt auf $I \times J$ eine Lipschitz-Bedingung, d.h. es gibt eine Konstante L, so daß

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

für $x \in I$ und y_1, $y_2 \in J$. Für y_1, $y_2 \in D$ gilt daher

$$\begin{aligned} |(Ty_1 - Ty_2)(x)| &= \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))| d\xi \\ &\leq |x - x_0| L \operatorname{Max}_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|\ . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq |I| L \|y_1 - y_2\|\ .$$

Wir verkleinern nun I so, daß $q = |I|L < 1$ gilt. Dann ist T kontrahierend in D.

3) T und D erfüllen alle Voraussetzungen des Kontraktionssatzes 2.1. Also gibt es genau ein $y \in D$ mit $Ty = y$ oder (3.3). Dies ist die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe (3.1).

Beispiele:

1) Wir kehren zurück zu der Anfangswertaufgabe $y' = \sqrt{|y|}$, $y(x_0) = y_0$. Sie erfüllt für $y_0 \neq 0$ eine Lipschitz-Bedingung in einer Umgebung von (x_0, y_0). Das Anfangswertproblem ist also - mit Ausnahme des Falles $y_0 = 0$ - eindeutig lösbar.

2) Die Anfangswertaufgabe $y' = 1 + y^2$, $y(x_0) = y_0$ ist für jedes (x_0, y_0) eindeutig lösbar. Die Lösung braucht aber nicht in ganz $\mathbb{R}$ zu existieren. Z.B. ist $y = tanx$ die Lösung für $x_0 = y_0 = 0$. Diese hat bei $x = \pm\pi/2$ Pole.

Das letzte Beispiel zeigt, daß die durch den Satz von Picard-Lindelöf garantierte Existenz- und Eindeutigkeit "im Kleinen" keineswegs die "Existenz im Großen" nach sich zieht.

Satz 2.3.2 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und f erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung in A. Dann besitzt für jedes $(x_0, y_0) \in A$ die Anfangswertaufgabe*

$$y' = f(x, y)\ , \qquad y(x_0) = y_0$$

eine Lösung mit folgenden Eigenschaften:

(a) Der Abschluß des Graphen von y rechts und links von x_0 ist keine kompakte Teilmenge von A.

(b) Jede Lösung der Anfangswertaufgabe ist eine Restriktion von y.

Beweis:

(i) Sind y_1, y_2 Lösungen der Anfangswertaufgabe in den Intervallen I_1, I_2, so ist $y_1 = y_2$ auf $I_1 \cap I_2$. Wäre dies nicht richtig, so gäbe es z.B. rechts von x_0 ein $\xi \in I_1 \cap I_2$ mit $y_1(\xi) \neq y_2(\xi)$. Sei ξ_0 das Infimum dieser Punkte. Dann ist $\xi_0 \geq x_0$ und $y_1(\xi_0) = y_2(\xi_0) = \eta_0$. Die Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$, $y(\xi_0) = \eta_0$ ist lokal eindeutig lösbar. Also ist $y_1 = y_2$ in einer Umgebung von ξ_0, im Widerspruch zur Definition von ξ_0. Also kann es solche Punkte rechts von x_0 nicht geben. Ebenso zeigt man, daß es solche Punkte ξ links von x_0 nicht geben kann.

(ii) Sei $\mathcal{J}$ die Menge von Intervallen I mit $x_0 \in I$, so daß die Anfangswertaufgabe eine Lösung y_I in I besitzt. Wir definieren dann auf dem Intervall $J = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I$ die Funktion y durch

$$y(x) = y_I(x) \quad \text{für} \quad x \in I\ .$$

Nach (i) ist y wohldefiniert. Offenbar ist jede Lösung der Anfangswertaufgabe Restriktion von y.

(iii) Sei $G_+ = \{(x, y(x)) : x \in J,\ x \geq x_0\}$ der Graph von y rechts von x_0. Wäre $\overline{G}_+$ kompakte Teilmenge von A, so wäre y beschränkt in J. Wegen der Stetigkeit von f wäre auch f auf G_+, dann auch $y' = f(x, y(x))$ in J beschränkt und damit y gleichmäßig stetig auf J. Damit wären

$$\xi = \mathrm{Sup} J \quad , \qquad \eta = \lim_{x \to \xi} y(x)$$

endliche und wohldefinierte Zahlen. Da $\overline{G}_+$ abgeschlossen ist, wäre $(\xi, \eta) \in \overline{G}_+ \subseteq A$. Also könnten wir in (ξ, η) die Anfangswertaufgabe lösen. y wäre also, im Widerspruch zur Konstruktion in (ii), über J hinaus fortsetzbar.

(iv) y erfüllt alle im Satz genannten Eigenschaften.

$\square$

Kurz formuliert sagt der Satz: Die Anfangswertaufgabe besitzt eine Lösung, welche rechts und links von x_0 dem Rand von A beliebig nahe kommt. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt.

2.4 Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir übertragen nun die Sätze aus §3 auf Systeme

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \ , \qquad i = 1, \dots, n \tag{4.1}$$

von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Anfangsbedingungen lauten nun

$$y_i(x_0) = y_{i0} \ , \qquad i = 1, \dots, n \ . \tag{4.2}$$

Mit Hilfe der Bezeichnungen

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \ , \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \ , \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

können wir (4.1) - (4.2) in der Form

$$y' = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \tag{4.3}$$

schreiben.

Nun kann man mehr oder weniger erraten, wie die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf für Systeme lauten. Eine Lösung von (4.3) ist jetzt eine Funktion $y \in (C^1(I))^n$ mit einem Intervall I mit $x_0 \in I$, welche (4.3) in I erfüllt. f muß dazu nach Peano in einer Umgebung von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ stetig sein. Für Picard-Lindelöf brauchen wir jetzt eine Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq L\|y - z\| \tag{4.4}$$

für (x,y), $(x,z) \in A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dabei kann man als Norm $\|\cdot\|$ irgendeine Norm in $\mathbb{R}^n$ verwenden, z.B.

$$\|y\| = \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| \ .$$

In diesem Fall bedeutet (4.4)

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \leq L \max_{i=1,\ldots,n} |y_j - z_j| \ .$$

Die der Anfangswertaufgabe äquivalente Integralgleichung lautet komponentenweise

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))d\xi \ , \quad x \in I \ ,$$

Die Fixpunktsätze wendet man nun an im Banach-Raum $(C(I))^n$ mit der Norm

$$\|y\| = \max_{i=1,\ldots,n} \max_{I} |y_i(x)| \ ,$$

und zwar auf die Abbildung T, welche durch

$$(Ty)_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))d\xi \ , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

definiert ist.

Der Satz von Arzelà-Ascoli gilt in $(C(I))^n$ sinngemäß, und die entscheidende Abschätzung bei Picard-Lindelöf ist nun

$$\begin{aligned} |(Ty)_i(x) - (Tz)_i(x)| &\leq |\int_{x_0}^{x} (f_i(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi)) - f_i(\xi, z_1(\xi), \ldots, z_n(\xi))d\xi| \\ &\leq |x - x_0| L \max_{j=1,\ldots,n} \max_{I} |y_j(\xi) - z_j(\xi)| \ , \end{aligned}$$

also

$$\|Ty - Tz\| \leq |I|L\|y - z\|$$

in der Norm von $C^n(I)$. Diese Beispiele sollten ausreichen, um Aussage und Beweis der Sätze von Peano und Picard-Lindelöf für Systeme zu verstehen. Wir wollen die Existenz- und Eindeutigkeitssätze wenigstens formulieren.

Satz 2.4.1 *(Peano für Systeme): Sei f stetig in einer Umgebung von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gibt es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Funktion $y \in (C^1(I))^n$, welche Lösung von (4.3) in I ist.*

Satz 2.4.2 *(Picard-Lindelöf für Systeme): Sei f stetig in einer Umgebung von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und erfülle dort eine Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Funktion $y \in (C^1(I))^n$, welche Lösung von (4.3) in I ist. y ist eindeutig bestimmt.*

Satz 2.4.3 *(Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme): Sei f stetig in $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und erfülle dort eine lokale Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es für $(x, y_0) \in A$ ein Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Lösung $y \in (C^1(I))^n$ mit folgender Eigenschaft:*

(a) Der Abschluß des Graphen von y links und rechts von x_0 ist keine kompakte Teilmenge von A.

(b) Jede Lösung der Anfangswertaufgabe ist eine Restriktion von y.

Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.5}$$

können als Systeme 1. Ordnung geschrieben werden. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= y_n \\ y'_n &= f(y, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{4.6}$$

und haben dann für $y_1, \ldots, y_n$ das System

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= f(y, y_1, \ldots, y_n) \; .
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Jede Lösung $y \in C^n(I)$ von (4.5) führt also zu einer Lösung $y \in (C^1(I))^n$ von (4.7) und umgekehrt. Die Anfangsbedingung

$$y_i(x_0) = y_{i,0} \; , \qquad i = 1, \ldots, n$$

für (4.7) entspricht dabei der Anfangsbedingung

$$y^{(i)}(x_0) = y_{i+1,0} \; , \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

für (4.5). Damit können wir die Existenz- und Eindeutigkeitssätze für die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \; , \quad y^{(i)}(x_0) = y_i \; , \qquad i = 0, \ldots, n-1 \tag{4.8}$$

aussprechen. Auch diese Sätze verstehen sich weitgehend von selbst. Die Lipschitz-Bedingung für (4.5) bedeutet für f einfach

$$|f(x, y_1, \ldots, y_n) - f(x, z_1, \ldots, z_n)| \leq L \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - z_i| \; .$$

2.5 Abhängigkeit von den Anfangswerten

Wir untersuchen nun, wie die Lösung von

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.1}$$

von y_0 abhängt. Dabei betrachten wir wieder den Fall einer einzelnen Gleichung. Für Systeme läuft alles ganz entsprechend.

Satz 2.5.1 *f erfülle in der offenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine lokale Lipschitz-Bedingung, und y sei Lösung von (5.1) in einem kompakten Intervall I mit $x_0 \in I$. Dann ist $y(x)$ für jedes $x \in I$ eine stetige Funktion von y_0. Diese Stetigkeit ist gleichmäßig in I.*

Beweis: Für hinreichend kleines h ist auch

$$y_h' = f(x, y_h) \ , \qquad y_h(x_0) = y_0 + h$$

in I lösbar, und es gilt für $x \in I$

$$y_h(x) - y(x) = h + \int_{x_0}^{x} (f(\xi, y_h(\xi)) - f(\xi, y(\xi))d\xi \ . \tag{5.2}$$

Für ein hinreichend kleines Intervall $I_0 \subseteq I$ erfüllt f eine Lipschitz-Bedingung, also

$$|y_h(x) - y(x)| \leq |h| + |I_0| L \max_{\xi \in I_0} |y_h(\xi) - y(\xi)|$$

für $x \in I_0$. Mit der Norm des maximalen Betrages in I_0 folgt

$$\|y_h - y\| \leq |h| + |I_0| L \|y_h - y\| \ .$$

Nun machen wir I_0 so klein, daß $q = |I_0|L < 1$. Dann folgt

$$\|y_h - y\| \leq |h|/(1-q)$$

und damit

$$\lim_{h \to 0} y_h(x) = y(x)$$

gleichmäßig in I_0.

Für ein beliebiges $x \in I$ überdeckt man den Graphen von y durch endlich viele offene Mengen, in denen f eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und die hinreichend klein sind.

Satz 2.5.2 *Sei $f \in C^2(A)$ und $A \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, und y sei die Lösung von (5.1) in einem Intervall I mit $x_0 \in I$. Dann ist $y(x)$ für jedes $x \in I$ eine stetig differenzierbare Funktion von y_0, und $z(x) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(x)$ löst die Anfangswertaufgabe*

$$z' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))z \ , \qquad z(x_0) = 1 \ . \tag{5.3}$$

Beweis: Wir dividieren (5.2) durch h und erhalten

$$\frac{1}{h}(y_h(x) - y(x)) = 1 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(\xi, y_h(\xi)) - f(\xi, y(\xi))}{h} \, d\xi \ .$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialgleichung gibt es ein $\tilde{y}_h(\xi)$ zwischen $y_h(\xi)$ und $y(\xi)$ mit

$$f(\xi, y_h(\xi)) - f(\xi, y(\xi)) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \tilde{y}_h(\xi))(y_h(\xi) - y(\xi)) \ .$$

Damit haben wir für die Funktion $z_h = (y_h - y)/h$

$$z_h(x) = 1 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \tilde{y}_h(\xi)) z_h(\xi) d\xi \ . \tag{5.4}$$

In einem hinreichend kleinen Intervall I_0 folgt hieraus zunächst einmal die Beschränktheit von z_h für $h \to 0$. Subtrahieren wir von (5.4) die zu (5.3) äquivalente Integralgleichung

$$z(x) = 1 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi)) z(\xi) d\xi \ ,$$

so entsteht

$$\begin{aligned} z_h(x) - z(x) &= \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \tilde{y}_h(\xi)) z_h(\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi)) z(\xi) \right) d\xi \ , \\ &= \int\limits_{x_0}^{x} \Bigg\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \tilde{y}_h(\xi)) - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi)) \right) z_h(\xi) \\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi))(z_h(\xi) - z(\xi)) \Bigg\} d\xi \ . \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzungen an f haben wir in I_0

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \tilde{y}_h(\xi)) - \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi)) \right| &\leq M |\tilde{y}_h(\xi) - y(\xi)| \ , \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi)) \right| &\leq L \ . \end{aligned}$$

Also gilt mit der Norm in $C(I_0)$

$$\|z_h - z\| \leq |I_0|M\|\tilde{y}_h - y\|\|z_h\| + |I_0|L\|z_h - z\| \ .$$

Wählen wir wieder I_0 so klein, daß $q = |I_0|L < 1$ ist, so folgt

$$\|z_h - z\| \leq \frac{|I_0|M}{1-q}\|\tilde{y}_h - y\|\|z_h\| \ .$$

Für $h \to 0$ bleibt $\|z_h\|$ beschränkt, und nach Satz 5.1 gilt $\|y_h - y\| \to 0$. Also $z_h \to z$ gleichmäßig in I_0.

$\square$

Kapitel 3

Elementare Lösungsmethoden

3.1 Einige elementar lösbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Mit “elementar lösbar” meinen wir, daß wir Lösungen von Differentialgleichungen durch Lösung von Gleichungen in $\mathbb{R}^n$ und Aufsuchen von Stammfunktionen (“Quadrieren”) finden können.

I. $y' = f(x)$. Natürlich ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \int^x f(\xi)d\xi + c$$

mit einer beliebigen Konstanten c.

II. $y' = g(y)$. Für jede Lösung mit $y' \neq 0$ können wir y als neue unabhängige Variable einführen und erhalten

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)} \ ,$$

und diese Differentialgleichung ist von der Form I. Also

$$x(y) = \int^y \frac{d\eta}{g(\eta)} + c$$

und man bekommt $y(x)$ durch Auflösen einer Gleichung.

III. $y' = f(x)g(y)$ (Differentialgleichung mit getrennter Variabler). Sei y eine Lösung mit $g(y) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x) \ ,$$

und durch Integration nach x entsteht

$$\int^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int^{x} f(\xi) d\xi + c \ .$$

$y(x)$ ergibt sich nun durch Auflösen dieser Gleichung. Durch Differenzieren dieser Gleichung nach x sieht man umgekehrt, daß jede Lösung dieser Gleichung zu einer Lösung der Differentialgleichung führt. Möchte man die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllen, so schreibt man

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi$$

und bestimmt $y(x)$ aus dieser Gleichung.

IV. $y' = f(ax + by + c)$, a, b, c konstant, $b \neq 0$.

Wir führen als neue abhängige Variable $u = ax + by + c$ ein und haben dann für u die Differentialgleichung

$$u' = a + by' = a + bf(ax + by + c) = a + bf(u) \ ,$$

welche vom Typ II ist.

V. $y' = f(\frac{y}{x})$ (Homogene Differentialgleichung)

Hier führen wir die neue abhängige Variable $u = \frac{y}{x}$ ein. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} \left(f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} \right) = \frac{f(u) - u}{x} \ ,$$

und dies ist der Typ III.

VI. $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, a, b, c, α, β, γ konstant.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

(a) $a\beta - b\alpha = 0$. Dann hängt das Argument von f nur von $ax + by$ ab, und wir haben den Typ IV.

(b) $a\beta - b\alpha \neq 0$. Dann besitzt das lineare System

$$ax + by + c = 0 \,, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

eine Lösung x_0, y_0. Wir führen die neuen Variablen

$$\xi = x - x_0 \,, \qquad \eta = y - y_0$$

ein. Für die Funktion

$$\eta(\xi) = y(\xi + x_0) - y_0$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} &= y'(\xi + x_0) = f\left(\frac{a(\xi + x_0) + b(\eta(\xi) + y_0) + c}{\alpha(\xi + x_0) + \beta(\eta(\xi) + y_0) + \gamma}\right) \\ &= f\left(\frac{a\xi + b\eta(\xi)}{\alpha\xi + \beta\eta(\xi)}\right) = f\left(\frac{a + b\eta(\xi)/\xi}{\alpha + \beta\eta(\xi)/\xi}\right) \,, \end{aligned}$$

und dies ist eine Differentialgleichung für η vom Typ V.

VII. $y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0$, $\alpha \neq 1$ (Bernoulli)

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ und bekommen

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0$$

oder

$$(y^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $y^{1-\alpha}$, die wir mit den Methoden aus I.4 lösen können.

VIII. $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$ (Riccati)

Diese können wir lösen, wenn wir eine spezielle Lösung kennen. Sei ϕ eine solche und $u = y - \phi$. Dann ist

$$u' + g(x)u + h(x)(y^2 - \phi^2) = 0 \,.$$

Wegen $y^2 - \phi^2 = (y - \phi)(y + \phi) = u(u + 2\phi)$ lautet dies

$$u' + g(x)u + h(x)u(u + 2\phi) = 0 \ ,$$
$$u' + (g + 2\phi)u + hu^2 = 0 \ ,$$

und diese Gleichung ist vom Typ VII mit $\alpha = 2$.

IX. $\quad y = xy' + g(y')$ (Clairaut)

Man verifiziert, daß für jedes c die Gerade

$$y = cx + g(c) \tag{1.1}$$

Lösung ist. Weitere Lösungen mit $y' \neq 0$ bekommt man durch die Legendre - Transformation. Diese führt zunächst die Steigung $\xi = y'(x)$ als neue unabhängige Variable ein. Unter der Annahme $y'' \neq 0$ ist dies nach ξ auflösbar: $x = h(\xi)$. Die neue abhängige Variable ist $\eta = \xi x - y$, also $\eta(\xi) = \xi h(\xi) - y(h(\xi))$. Die Legendre-Transformation ist invertierbar. Es ist nämlich

$$\eta'(\xi) = \xi h'(\xi) + h(\xi) - y'(h(\xi))h'(\xi) = h(\xi)$$

und damit $x = \eta'(\xi)$, $y = \xi x - \eta(\xi)$. Die inverse Legendre-Transformation wird also durch genau die gleichen Formeln dargestellt, wie die Legendre-Transformation selbst: Sie ist involutorisch.

Als Beispiel betrachten wir die Legendre-Transformation der Kurve $y = -1/x$, $x > 0$. Es ist

$$\xi = y'(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad \text{also} \ \ x = h(\xi) = \xi^{-1/2} \ ,$$
$$\eta = \xi x - y = \xi x + \frac{1}{x} = 2\xi^{1/2} \ , \quad \xi > 0 \ .$$

Führen wir die Legendre-Transformation für die Kurve $\eta = 2\xi^{1/2}$, $\xi > 0$ durch, so erhalten wir in den neuen Variablen x, y

$$x = \eta'(\xi) = \xi^{-1/2} \quad , \quad \text{also} \ \ \xi = H(x) = \frac{1}{x^2} \ ,$$
$$y = x\xi - \eta = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \ ,$$

also in der Tat die ursprüngliche Kurve.

Die Legendre-Transformation kann man zur Lösung von Differentialgleichungen der Form $F(x, xy' - y, y') = 0$ einsetzen. Durch Legendre - Transformation geht diese über in $F(\eta', \eta, \xi) = 0$. Besitzt diese eine Lösung $\eta = \eta(\xi)$, so ist

$$x = \eta'(\xi)\ , \quad y = \xi\eta'(\xi) - \eta(\xi)$$

eine Parameter-Darstellung einer Lösung von $F(x, xy' - y, y') = 0$ mit Parameter ξ.

Die Clairautsche Differentialgleichung geht durch die Legendre - Transformation über in $\eta + g(\xi) = 0$. Diese "Differentialgleichung" hat die Lösung $\eta = -g(\xi)$. Damit gewinnt man als Lösung der Clairautschen Differentialgleichung

$$x = -g'(\xi)\ , \quad y = -\xi g'(\xi) + g(\xi)\ . \tag{1.2}$$

Diese hätten wir auch erhalten können als die Einhüllende der Kurvenschar (1.1). Die Einhüllende einer Kurvenschar nennt man eine Kurve, welche jede Kurve der Schar berührt. Die Einhüllende einer Kurvenschar $F(x, y, c) = 0$ erhält man bekanntlich aus den Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0\ , \quad F_c(x, y, c) = 0$$

durch Elimination von c. Wir geben eine kurze und heuristische Herleitung. Sei $y = y(x)$ eine Einhüllende. Dann gibt es für jedes x einen Parameterwert $c = c(x)$, so daß

$$F(x, y(x), c(x)) = 0\ .$$

Das heißt nichts anderes, als daß $(x, y(x))$ auf einer Kurve der Schar liegt, eben derjenigen mit dem Parameter $c = c(x)$. Ist $y = y_c(x)$ die Kurve der Schar mit dem Parameter c, so ist

$$F(x, y_c(x), c) = 0$$

für alle x. Wir differenzieren beide Gleichungen nach x und bekommen

$$\begin{aligned} F_x(x, y(x), c(x)) + y'(x)F_y(x, y(x), c(x)) + c'(x)F_c(x, y(x), c(x)) &= 0\ , \\ F_x(x, y_c(x), c) + y_c'(x)F_y(x, y_c(x), c) &= 0\ . \end{aligned}$$

Für $c = c(x)$ muß $y'(x) = y_c'(x)$ sein, denn y soll y_c ja in x berühren. Für $c'(x) \neq 0$ folgt

$$F_c(x, y(x), c(x)) = 0\ .$$

Auf (1) angewendet ergibt dies

$$y = cx + g(c) \; , \qquad 0 = x + g'(c) \; .$$

Verwenden wir c als Kurvenparameter, so haben wir

$$x = -g'(c) \; , \qquad y = -cg'(c) + g(c)$$

und dies ist (1.2).

Von der geometrischen Bedeutung einer Differentialgleichung 1. Ordnung her ist klar, daß die Einhüllende einer Schar von Lösungen stets wieder eine Lösung ist.

Beispiel: Für die Clairautsche Differentialgleichung $y = xy' + e^{y'}$ erhält man die Lösung $y = x(\log(-x) - 1)$ in $x < 0$. Die Geradenschar $y = cx + e^c$ hat diese Lösung als Einhüllende.

X. $y = xf(y') + g(y')$ (d'Alembert)

Auch hier führen wir $\xi = y'(x)$ als neue unabhängige Variable ein und stellen dann die Kurve $(x, y(x))$ durch die Parameterdarstellung $(x(\xi), y(\xi))$ dar. Dann ist einerseits $\dot{y} = \xi\dot{x}$ (Punkte bedeuten jetzt Ableitungen nach ξ) und andererseits

$$\dot{y} = \dot{x}f(\xi) + x\dot{f}(\xi) + \dot{g}(\xi) \; .$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\dot{y}$ ergibt

$$\dot{x}(f(\xi) - 1) + x\dot{f}(\xi) + \dot{g}(\xi) = 0 \; ,$$

und dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für x, die wir nach I.4 lösen können. Ist $x(\xi)$ bekannt, so ergibt sich $y(\xi) = x(\xi)f(\xi) + g(\xi)$.

Viele elementare lösbare Fälle sind von E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Teil I, gesammelt worden. Einige Kostproben:

Nr.	**Differentialgleichung**	**Lösung**
1.83	$y' = \tan(xy)$	$\int\limits_0^y e^{t^2/2}\cos(xt)dt = Ce^{x^2/2}$
1.278	$(y^2 + 4\sin x)y' = \cos x$	$\sin x = Ce^{4y} - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{8} - \frac{1}{32}$
1.343	$(\log y + x)y' = 1$	$x = e^y \left(C + \int^y e^{-y}\log y dy \right)$
1.353	$xy'\cos y + \sin y = 0$	$x\sin y = C$
1.527	$y'^3 - xy^4y' - y^5 = 0$	$y = \frac{c^3}{c^2x-1}$, $4x^3y^2 = 27$, $y = 0$

3.2 Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Wir wollen nun etwas systematischer nach Lösungen suchen.

Wir schreiben die Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \; , \qquad p, q \quad \text{stetig in} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad (2.1)$$

oder auch

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0\ . \tag{2.2}$$

Sie heißt exakt in einem Gebiet $A \subseteq \mathbb{R}^2$, wenn es dort eine Funktion $\phi(x,y) \in C^1$ gibt mit

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = p\ , \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = q$$

oder

$$d\phi = pdx + qdy\ .$$

Wir nennen ϕ die Stammfunktion der Differentialgleichung.

Satz 3.2.1 *Sei (2.1) in A exakt und ϕ eine Stammfunktion. Dann ist jede C^1-Funktion y mit $\phi(x,y(x)) = c$ eine Lösung, und jede Lösung von (2.1) ist von dieser Form.*

Beweis: Sei y eine Funktion der genannten Art. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dx}\phi(x,y(x)) &= \phi_x(x,y(x)) + y'(x)\phi_y(x,y(x)) \\ &= p(x,y(x)) + y'(x)q(x,y(x))\ , \end{aligned}$$

also y Lösung. Ist umgekehrt y Lösung, so bestätigt die gleiche Rechnung, daß $\frac{d}{dx}\phi(x,y(x)) = 0$ und damit $\phi(x,y(x)) = c$ ist.

□

Aus Analysis II weiß man:

Satz 3.2.2 *Ist A einfach zusammenhängend und sind dort p, $q \in C^1$, so ist (2.1) genau dann exakt, wenn die Integrabilitäts-Bedingung*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{2.3}$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist das Integral

$$\phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (pdx + qdy) \tag{2.4}$$

vom Weg unabhängig und eine Stammfunktion von (2.1).

Exakte Differentialgleichungen sind also elementar lösbar.

Zum Beispiel ist die Differentialgleichung

$$12xy + 3 + 6x^2 y' = 0 \tag{2.5}$$

exakt in $\mathbb{R}^2$, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial y}(12xy + 3) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2) = 12x \ .$$

Eine Stammfunktion ϕ finden wir durch Berechnung des Integrals (2.4), wobei wir als Integrationsweg die Gerade $(x(t), y(t)) = t(x, y), \ \ 0 \leq t \leq 1$ wählen. Dann wird

$$\phi(x, y) = 6x^2 y + 3x \ .$$

Die Lösungen von (2.5) haben also alle die Form

$$y = \frac{c - 3x}{6x^2} \ .$$

Ist (2.1) nicht exakt, so kann man mit einer Funktion $M \neq 0$ multiplizieren und die äquivalente Differentialgleichung

$$Mpdx + Mqdy = 0$$

betrachten. Die Integrabilitäts-Bedingung (2.3) lautet jetzt

$$\frac{\partial}{\partial y}(Mp) = \frac{\partial}{\partial x}(Mq) \tag{2.6}$$

oder

$$M_y p - M_x q = M(q_x - p_y) \ .$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für M. Können wir auch nur eine einzige Lösung finden, ist (2.1) gelöst. Wir nennen dann M einen integrierenden Faktor.

Betrachten wir wieder ein Beispiel. Die Differentialgleichung

$$xy^2 + y - xy' = 0 \tag{2.7}$$

ist nicht exakt, denn (2.3) ist verletzt. Multiplizieren wir aber mit $M(y) = 1/y^2$, so entsteht

$$x + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0 \;,$$

und diese erfüllt (2.3) für $y \neq 0$. Wir bestimmen die Stammfunktion (z.B. durch Integration entlang des Weges $(0,\infty)$, $(0,y)$, (y,x))

$$\phi(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}$$

und bekommen dann alle Lösungen von (2.7) in der oberen (unteren) Halbebene in der Form

$$y = \frac{2x}{c - x^2} \;.$$

Weitere Beispiele sind:

(a) Die Differentialgleichung III mit getrennten Variablen:

$$f(x)g(y)dx - dy = 0$$

$M = 1/g(y)$ ist integrierender Faktor.

(b) Die lineare Differentialgleichung

$$(a(x)y + s(x))dx - dy = 0 \;.$$

Die Bedingung (2.6) für einen integrierenden Faktor lautet

$$M_y(a(x)y + s(x)) + a(x)M = -M_x \;.$$

Eine Lösung ist $M = e^{-\int^x a dx}$.

(c) Die homogene Differentialgleichung V:

$$f(\frac{y}{x})dx - dy = 0 \;.$$

Die Gleichung (2.6) vereinfacht sich, wenn wir $M = M(\frac{y}{x})$ annehmen, zu

$$(f(u) - u)M'(u) + Mf'(u) = 0 \;,$$

und dies ist eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung für M.

(d) Der Typ IV:

$$f(ax + by + c)dx - dy = 0 \ .$$

Die Bedingung (2.6) für M lautet, wenn man $M = M(ax+by+c)$ annimmt,

$$bf'M + (a + bf)M' = 0 \ .$$

Hieraus ist M sofort zu berechnen.

Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen

4.1 Lineare Systeme

Ein System von Differentialgleichungen der Form

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + s_1(x) \\
y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) + s_2(x) \\
&\ \ \cdots \\
y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + s_n(x)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

heißt linear. Wir schreiben kurz

$$y'(x) = A(x)y(x) + s(x) \tag{1.2}$$

mit den Vektoren und Matrizen

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} , \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x), \ldots, a_{1n}(x) \\ \vdots \\ a_{n1}(x), \ldots, a_{nn}(x) \end{pmatrix} , \quad s(x) = \begin{pmatrix} s_1(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix} .$$

Das System heißt homogen, falls $s = 0$, andernfalls inhomogen.

Wir studieren wieder die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay + s , \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

und beweisen

Satz 4.1.1 *Seien A, s stetig (d.h. sämtliche Elemente von a, s seien stetige Funktionen von x) in I und $x_0 \in I$. Dann gibt es eine Lösung von (1.3) in $C^1(I)$. Sie ist eindeutig bestimmt.*

Beweis: Nach Satz II.4.2 gibt es zu jedem $x_0 \in \mathring{I}$ eine Umgebung, in der (1.3) eindeutig lösbar ist. Wir müssen aber mehr zeigen, nämlich, daß die Lösung in ganz I existiert. Dazu wiederholen wir den Beweis von Satz II.2.1 unter den jetzigen Voraussetzungen. Es genügt, den Satz für jedes kompakte Teilintervall von I zu beweisen. Wir können also I als kompakt voraussetzen.

Wie früher schreiben wir (1.3) als Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} A(\xi)y(\xi)d\xi$$

und suchen dann statt einer Lösung $y \in C^1(I)$ von (1.3) einen Fixpunkt $y \in (C(I))^n$ des Operators

$$(Ty)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} A(\xi)y(\xi)d\xi \ .$$

Mit den Vektor- bzw. Matrizennormen

$$\|y\| = \max_{i=1} |y_i| \ , \quad \|A\| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

in $\mathbb{R}^n$ haben wir die Norm

$$\|y\| = \max_{x \in I} \|y(x)\|$$

in $(C(I))^n$, die wir schon in II.4 verwendet haben. Wie dort bekommen wir

$$\begin{aligned} \|Ty - Tz\| &\leq |I|L\|y - z\| \ , \\ L &= \max_{x \in I} \|A(x)\| \ . \end{aligned}$$

Ist $|I|L < 1$, so ist T kontrahierend in $(C(I))^n$, und nach dem Kontraktionssatz II.2.1 gibt es genau einen Fixpunkt von T. Dieser führt zu einer Lösung von (1.3) in ganz I. Ist $|I|L \geq 1$, so überdecken wir I mit endlich vielen kompakten Intervallen I_k mit $|I_k|L < 1$. Dann sind die Anfangswertaufgaben (**??**) für $x_0 \in I_k$ in ganz I_k lösbar. Durch Zusammensetzen der Lösungen in I_k ergibt sich die Lösung in I.

□

Bemerkung: Dieser globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz läßt sich auch beweisen - mit genau dem gleichen Beweis - für Systeme $y' = f(x,y)$, welche einer globalen Lipschitzbedingung

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \le L\|y - z\| \ , \qquad \forall \ (x,y),(x,z) \in I \times \mathbb{R}^n$$

genügen.

Wir betrachten nun das homogene System.

Satz 4.1.2 *Die Lösungen des homogenen Systems (1.2) (d.h. (1.2) mit $s = 0$) bilden einen Untervektorraum von $(C^1(I))^n$ der Dimension n, den Lösungsraum. Ist $y(x,y_0)$ die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe (1.3), so ist $y_0 \to y(\,\cdot\,,y_0)$ ein Vektorraumisomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf den Lösungsraum.*

Beweis: Mit y, z sind offenbar auch $\alpha y + \beta z$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, Lösungen des homogenen Systems. Also bilden die Lösungen einen Vektorraum, eben den Lösungsraum. Die Abbildung $y_0 \to y(\,\cdot\,,y_0)$ ist offenbar linear und injektiv. Sie ist auch surjektiv. Denn ist y eine Lösung und $y_0 = y(x_0)$, so ist ja $y = y(\,\cdot\,,y_0)$. Also ist $y_0 \to y(\,\cdot\,,y_0)$ ein Vektorraumisomorphismus und damit die Dimension des Lösungsraums n.

□

Nun kommen wir zu einigen Fragen der linearen Abhängigkeit in $(C(I))^n$, welche manchmal zu Mißverständnissen Anlaß geben. Die (vektorwertigen) Funktionen $y_1,\ldots,y_m$ heißen linear unabhängig in I, wenn $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m = 0$ in I nur für $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ möglich ist. Andernfalls heißen $y_1,\ldots,y_m$ linear abhängig in I. Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $(C(\mathbb{R}))^2$. Trotzdem sind diese beiden Vektoren aber für $x = 1$ linear abhängig.

Für Lösungen des homogenen Systems kann dies nicht eintreten. Die m Lösungen $y_1,\ldots,y_m$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren

$y_1(x), \ldots, y_m(x)$ für ein $x \in I$ linear unabhängig sind. Aus $\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_m y_m(x) = 0$ für ein $x \in I$ folgt nämlich nach Satz 1.2 $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_m = 0$ in ganz I.

Aus Satz 1.2 folgt, daß mehr als n Lösungen des homogenen Systems immer linear abhängig sind, daß es aber n linear unabhängige Lösungen gibt. Jedes System von n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ nennen wir ein Fundamentalsystem und fassen sie in einer (n, n)-Matrix

$$Y = (y_1, \ldots, y_n)$$

zusammen. Jede weitere Lösung des homogenen Systems läßt sich dann in der Form

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = Yc\,, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Y erfüllt die Differentialgleichung $Y' = AY$.

Mit jedem Fundamentalsystem ist auch $Z = YC$ für jede konstante nichtsinguläre (n, n)-Matrix C ein Fundamentalsystem. Mit $C = Y^{-1}(x_0)$ ist $Z(x_0) = I$, die n-dimensionale Einheitsmatrix. Jedes weitere Fundamentalsystem Y ist dann von der Form ZC mit einer konstanten Matrix C. Die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe $y' = Ay$, $y(x_0) = y_0$ ist dann $y = Zy_0$.

Man nennt $W = \det(Y)$ die Wronski-Determinate von $y_1, \ldots, y_n$.

Satz 4.1.3 *Sei A stetig in I und $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen der homogenen Gleichung $y' = Ay$ mit der Wronski-Determinate W. Dann gilt*

$$W' = \mathit{Spur}\,(A) W$$

mit Spur $(a) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Beweis: Nach der Produktregel ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \det(Y) &= \sum_{i=1}^{n} \det(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i', y_{i+1}, \ldots, y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(y_1, \ldots, y_{i-1}, Ay_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,. \end{aligned}$$

Sei $Z(z_1, \dots, z_n)$ ein Fundamentalsystem mit $Z(x_0) = I$. Dann ist $z_i(x_0) = e_i$ der i-te Einheitsvektor, und an der Stelle x_0 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\det(Z)|_{x=x_0} &= \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \dots, e_{i-1}, A(x_0)e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_0) = \operatorname{Spur}(A(x_0)) \\
&= \operatorname{Spur}(A(x_0)) \det(Z(x_0)) \ .
\end{aligned}$$

Ist C eine beliebige konstante (n,n)-Matrix, so folgt nach dem Multiplikationssatz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\det(ZC)|_{x=x_0} &= \frac{d}{dx}\det(Z)|_{x=x_0}\det(C) \\
&= \operatorname{Spur}(A(x_0)) \det(Z(x_0)) \det(C) \\
&= \operatorname{Spur}(A(x_0)) \det(Z(x_0)C) \ .
\end{aligned}$$

Da jedes System von Lösungen $y_1, \dots, y_n$ in der Form ZC geschrieben werden kann und $x_0 \in I$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

$\square$

Folgerung: Durch Lösen der Differentialgleichung für W folgt

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Spur}(A(\xi))d\xi} \ .$$

Insbesondere folgt: Die Wronskische Determinante eines Systems von Lösungen ist entweder in ganz I von Null verschieden oder identisch Null. n Lösungen des homogenen Systems bilden also genau dann ein Fundamentalsystem, wenn ihre Wronski-Determinante an einer Stelle $\neq 0$ ist.

Wir wenden uns nun dem inhomogenen System

$$y' = Ay + s \tag{1.4}$$

zu. Wie im skalaren Fall (vgl. I.4) gilt

Satz 4.1.4 *Sei y_p eine spezielle Lösung von (1.4). Dann hat jede Lösung von (1.4) die Form*

$$y = y_p + Yc \quad , \qquad c \in \mathbb{R}^n \; . \tag{1.5}$$

Beweis: Offenbar ist (1.5) Lösung von (1.4). Ist umgekehrt y Lösung von (1.4), so ist $y - y_p$ Lösung des zugehörigen homogenen Systems und damit eine Linearkombination des Fundamentalsystems.

□

Eine spezielle Lösung y_p von (1.4) kann man wie im skalaren Fall durch Variation der Konstanten erhalten. Wir machen den Ansatz

$$y_p(x) = Y(x)c(x) \quad , \qquad c \in (C^1(I))^n \; .$$

Dann ist $y_p' = Ay_p + s$ gleichbedeutend mit

$$Y'c + Yc' = AYc + s \; ,$$

oder, wegen $Y' = AY$,

$$Yc' = s \; .$$

Da Y regulär ist, erhalten wir

$$c' = Y^{-1}s \quad , \quad c(x) = \int^x Y^{-1}(\xi)s(\xi)d\xi \; .$$

Damit ergibt sich als spezielle Lösung von (1.4)

$$y_p(x) = Y(x) \int^x Y^{-1}(\xi)s(\xi)d\xi \; .$$

und als allgemeine Lösung von (1.4)

$$y(x) = Y(x) \left\{ c + \int^x Y^{-1}(\xi)s(\xi)d\xi \right\} \; .$$

Insbesondere finden wir für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x_0) = y_0$

$$y(x) = Y(x) \left\{ Y^{-1}(x_0) y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi) s(\xi) d\xi \right\} .$$

Beispiel: Wir betrachten das System

$$y_1' = \frac{1}{x} y_1 - y_2 \quad , \quad y_2' = \frac{1}{x^2} y_1 + \frac{2}{x} y_2 + 1$$

für $x > 0$. Ein Fundamentalsystem für das homogene System ist

$$Y = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \log x \\ -x & x(1 + \log x) \end{pmatrix} ,$$

wie man sofort bestätigt. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{Spur}(A) = \frac{3}{x}$$

$$W = \det(Y) = x^3 .$$

In der Tat ist also

$$W' = 3x^2 = \frac{3}{x} x^3 = \mathrm{Spur}(A) W .$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems bilden wir

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2}(1 + \log x) & \frac{1}{x} \log x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

und bekommen dann als spezielle Lösung

$$y_p(x) = \int\limits^{x} Y^{-1}(\xi) s(\xi) d\xi = \int\limits^{x} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} \log \xi \\ \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\log x)^2 \\ \log x \end{pmatrix} .$$

Als allgemeine Lösung ergibt sich also

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -x^2 \log x \\ x(1 + \log x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\log x)^2 \\ \log x \end{pmatrix} .$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 1$ ergibt sich für $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, also

$$y_1(x) = -x^2 \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2 \ , \quad y_2(x) = x + x \log x + \log x \ .$$

Man sieht übrigens, daß diese Lösung in dem ganzen Intervall $I = (0, \infty)$ existiert, in dem A stetig ist.

4.2 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Ist die Matrix $A(x)$ konstant, $A(x) = A$, so kann man ein Fundamentalsystem explizit angeben. Wir werden zwei verschiedene Methoden durchführen, die zum gleichen Ergebnis gelangen.

Dabei werden - auch für reelles A - komplexe Zahlen auftreten. Wir lassen daher im folgenden von vornherein für A, y, s auch komplexe Größen zu.

Sei also eine Lösung von

$$y' = Ay \ , \quad A \text{ konstante komplexe } (n, n) - \text{Matrix} \tag{2.1}$$

gesucht. Mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x} c$, $c \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, erhalten wir nach Kürzung um den Faktor $e^{\lambda x}$

$$\lambda c = Ac \ .$$

Ist also λ Eigenwert von A und c ein zugehöriger Eigenvektor, so ist $y = e^{\lambda x} c$ Lösung von (2.1).

Satz 4.2.1 *A besitze n linear unabhängige Eigenvektoren $c_1, \ldots, c_n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann bilden*

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x} c_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem von (2.1).

Beweis: Wir haben nur zu zeigen, daß die y_i linear unabhängig sind. Dies ist sicher der Fall, da schon die Vektoren

$$y_i(0) = c_i \quad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

linear unabhängig sind.

Leider haben nicht alle Matrizen n linear unabhängige Eigenvektoren, so daß das Fundamentalsystem im allgemeinen verwickelter aussieht. Nehmen wir z.B. die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \mathbf{O} & & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

Sie hat nur den Eigenwert λ, und zu diesem nur einen einzigen linear unabhängigen Eigenvektor, nämlich den ersten Einheitsvektor. (2.1) lautet komponentenweise

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' &= \lambda y_2 + y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= \lambda y_{n-1} + y_n \\ y_n' &= \lambda y_n \quad . \end{aligned}$$

Dieses System können wir rekursiv lösen (vgl. Aufg. 5). Eine Möglichkeit ist

$$\begin{aligned} y_n &= e^{\lambda x} \\ y_{n-1} &= x e^{\lambda x} \\ y_{n-2} &= \tfrac{x^2}{2} e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y_1 &= \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x} \quad , \end{aligned}$$

wie man durch vollständige Induktion sofort bestätigt. Ein Lösungsvektor ist also

$$y = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Aber wir können auch $y_n = 0$ setzen und haben dann als letzte Gleichung $y'_{n-1} = \lambda y_{n-1}$. Dies führt zu der Lösung

$$y = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir n Lösungen, die wir spaltenweise in einer Matrix zusammenfassen

$$Y = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 & \cdots & x^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & x & \cdots & x^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & x^{n-3}/(n-3)! \\ & \vdots & 0 & & \vdots \\ & & \vdots & & x \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

Wegen $Y(0) = I$ ist Y ein Fundamentalsystem.

Mit (2.2) haben wir den allgemeinen Fall schon erledigt. In **Lineare Algebra II** zeigt man nämlich, daß man jede (n,n)-Matrix A auf die Form

$$A = CJC^{-1} \; , \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_r \end{pmatrix} , \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} , \quad k = 1, \ldots, r \tag{2.3}$$

bringen kann. J heißt Jordansche Normalform von A. Die J_k heißen Jordan-Kästchen. Ihre Dimension n_k heißt Länge des Jordan-Kästchens. Jedes λ_k ist Eigenwert von A. Zu einem Eigenwert kann es mehrere Jordan-Kästchen verschiedener Länge geben. Die Anzahl der Jordan-Kästchen zu einem Eigenwert ist dessen geometrische Vielfachheit (d.h. die Dimension seines Eigenraumes). Die Summe der Längen der Jordan-Kästchen zu einem Eigenwert ist dessen algebraische Vielfachheit (d.h. seine Vielfachheit als Wurzel der charakteristischen Gleichung $\det(\lambda I - A) = 0$).

Satz 4.2.2 *Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Dann besitzt (2.1) ein Fundamentalsystem der Form*

$$p_{k\ell}(x)e^{\lambda_k x} \quad , \qquad k = 1, \dots, m \ , \quad \ell = 0, \dots, \sigma_k - 1 \ ,$$

wobei die Komponenten der Vektoren $p_{k\ell}$ Polynome vom Grade $\leq \ell$ sind.

Beweis: Wir setzen $y = Cz$ mit der Matrix C aus (2.3). Dann erfüllt z das homogene System

$$z' = Jz \ , \quad J = C^{-1}AC \ . \tag{2.4}$$

Spalten wir z auf gemäß J in $z = (z_1, \dots, z_r)^T$, $z_k \in \mathbb{C}^{n_k}$, so lautet dies

$$z_k' = J_k z_k \quad , \qquad k = 1, \dots, r \ . \tag{2.5}$$

Fundamentalsysteme Z_k dieser Systeme haben wir in (2.2) berechnet. Sie sind von der Form

$$Z_k = e^{\lambda_k' x} Q_k(x) \quad , \qquad \lambda_k' \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \ ,$$

wobei die Elemente in der ℓ-ten Spalte von Q_k Polynome vom Grade $< \ell$ in x sind. So kommen wir zu dem Fundamentalsystem

$$Z = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1' x} Q_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r' x} Q_r(x) \end{pmatrix}$$

von (2.4). Das Fundamentalsystem $Y = CZ$ von (2.1) hat wegen $n_k \leq \sigma_k$ die behauptete Form.

□

4.3 Matrizenfunktionen

Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

eine für $|x| < r$ absolut konvergente Potenzreihe. Für eine (n,n)-Matrix A mit $\|A\| < r$ hat dann

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \tag{3.1}$$

einen Sinn. Denn es ist

$$\|\sum_{k=\ell}^{m} c_k A^k\| \leq \sum_{k=\ell}^{m} |c_k| \|A^k\| \leq \sum_{k=\ell}^{m} |c_k| \|A\|^k \ .$$

Damit sind die n^2 Reihen in (3.1) konvergent, und (3.1) stellt eine wohldefinierte (n,n)-Matrix dar.

Als Beispiel betrachten wir die Exponentialfunktion

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ .$$

Sie konvergiert für jede Matrix A. Wir haben folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
e^O &= I \ , \\
e^\Lambda &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \ , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
e^{C^{-1}AC} &= C^{-1} e^A C \qquad\qquad (3.2) \\
e^{A+B} &= e^A e^B \qquad \text{falls} \quad AB = BA \\
(e^A)^{-1} &= e^{-A} \\
\frac{d}{dx} e^{Ax} &= A e^{Ax} \qquad .
\end{aligned}$$

Dies bestätigt man genau so wie im skalaren Fall.

Aus der letzten Formel in (3.2) sehen wir, daß $Y(x) = e^{Ax}$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ ist. Wir wollen dieses Fundamentalsystem mit dem in §2 gewonnenen vergleichen.

Zunächst nehmen wir an, daß A - wie in Satz 2.1 - n linear unabhängige Eigenvektoren $c_1, \ldots, c_n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat. Es ist dann

$$A = C\Lambda C^{-1} \quad , \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Nach (3.2) ist

$$e^{Ax} = Ce^{\Lambda x}C^{-1} = (e^{\lambda_1 x}c_1, \ldots, e^{\lambda_n x}c_n)C^{-1} .$$

Bis auf den Faktor C^{-1} erhalten wir also genau das Fundamentalsystem aus Satz 2.1.

Im allgemeinen Fall haben wir die Jordansche Normalform

$$A = CJC^{-1} \quad , \qquad J = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_r \end{pmatrix} ,$$
$$e^{Ax} = Ce^{Jx}C^{-1} \quad .$$

Es ist

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_r} \end{pmatrix} ,$$

und wir müssen also nur noch e^{J_k} berechnen. Mit

$$J_k = \lambda_k I_k + N_k \quad , \quad I_k = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{O} & & & 0 \end{pmatrix}$$

haben wir

$$N_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ \mathbf{O} & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \; N_k^{n_k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_k^{n_k} = 0 .$$

Da I_k, N_k vertauschbar sind, folgt nach (3.2)

$$\begin{aligned} e^{J_k x} &= e^{\lambda_k I_k x + N_k x} = e^{\lambda_k I_k x} e^{N_k x} \\ &= e^{\lambda_k x} \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \frac{1}{\ell!} N_k^\ell x^\ell . \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$P_{k,\ell}(x) = \frac{1}{\ell!} N_k^\ell x^\ell ,$$

so sind die $P_{k,\ell}$ in der Spalte ℓ Polynome vom Grade $\ell < \sigma_k$, und wir haben nach Rücktransformation in e^{Ax} - wieder bis auf den Faktor C^{-1} - genau das Fundamentalsystem aus Satz 2.2.

Die Lösungsformel für das Anfangswertproblem der inhomogenen Gleichung, also

$$y' = Ay + s , \qquad y(x_0) = y_0$$

schreibt sich nun einfach als

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-\xi)} s(\xi) d\xi .$$

4.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Jetzt betrachten wir die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) y = s(x) , \tag{4.1}$$

wobei die Funktionen a_i, s wieder in einem Intervall I stetig seien. In I.2.4 haben wir gesehen, daß wir genausogut das System 1. Ordnung

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & & & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

betrachten können. Sei Y ein Fundamentalsystem von (4.2), d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} .$$

Wir nennen dann die Funktion $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von (4.1) und $W = \det(Y)$ seine Wronski-Determinate. Aus Satz 1.3 folgt sofort

$$\begin{aligned} W'(x) &= -a_{n-1}(x) W(x) , \\ W(x) &= W(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(\xi) d\xi} . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die inhomogene Gleichung (4.1) kann wieder durch Variation der Konstanten gelöst werden. Diese nimmt jetzt die Form

$$\begin{array}{lclcccl} y & = & c_1(x) y_1 & + & \cdots & + & c_n(x) y_n \\ y' & = & c_1(x) y_1' & + & \cdots & + & c_n(x) y_n' \\ & & & & \cdots & & \\ y^{(n-1)} & = & c_1(x) y_1^{(n-1)} & + & \cdots & + & c_n(x) y_n^{(n-1)} \end{array}$$

an und führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcccccl} c_1'(x) y_1 & + & \cdots & + & c_n'(x) y_n & = & 0 \\ c_1'(x) y_1' & + & \cdots & + & c_n'(x) y_n & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)} & + & \cdots & + & c_n'(x) y_n^{(n-1)} & = & s \end{array}$$

für die $c_i'(x)$. Die Determinante dieses Systems ist gerade die Wronski-Determinate des Fundamentalssystems $y_1, \ldots, y_n$. Sei W_i die Wronski - Determinante des Lösungssystems $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, also

$$W_i = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_{i-1} & y_{i+1}' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & & y_{i-1}^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \end{pmatrix} \quad .$$

Dann folgt nach der Cramerschen Regel

$$c_i'(x) = (-1)^{n+i} s(x) \, \frac{W_i(x)}{W(x)} \quad .$$

Damit ergibt sich als Lösung der inhomogenen Gleichung (4.1)

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} y_i(x) \int^{x} s(\xi) \, \frac{W_i(\xi)}{W(\xi)} d\xi \ . \tag{4.4}$$

Seien nun die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ in (4.1) konstant. Durch Rückführen auf (4.2) könnten wir ein Fundamentalsystem für (4.1) mittels Satz 2.2 angeben. Die direkte Behandlung von (4.1) ist aber einfacher. Wir machen für die homogene Gleichung (4.1) (d.h. $s = 0$) den Ansatz $y = e^{\lambda x}$. Dieses y ist offenbar genau dann Lösung, wenn

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 + a_0 = 0 \ . \tag{4.5}$$

Hat diese Gleichung n paarweise verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so hat man ein Fundamentalsystem der Form

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

mit Wronski-Determinante

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \ .$$

Dies entspricht dem Satz 2.1.

Wir wollen nun annehmen, λ sei eine Wurzel der Vielfachheit 2 von (4.5). Dann ist neben (4.5) auch noch

$$n\lambda^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1 = 0 \tag{4.6}$$

erfüllt. Dies bedeutet aber, daß $y = xe^{\lambda x}$ Lösung ist. Denn es ist ja

$$y^{(k)} = \lambda^k xe^{\lambda x} + k\lambda^{k-1}e^{\lambda x} \quad , \qquad k = 0, 1, \ldots, n \; ,$$

und Einsetzen in (4.1) zeigt unter Benutzung von (4.5), (4.6), daß y tatsächlich Lösung der homogenen Gleichung (4.1) ist. Also haben wir zu λ schon zwei - offenbar linear unabhängige - Lösungen.

Ist λ sogar eine Nullstelle der Vielfachheit 3, so gilt auch noch

$$n(n-1)\lambda^{n-2} + (n-1)(n-2)\lambda^{n-3} + \cdots + 2a_2 = 0 \; .$$

Wie oben sieht man, daß nun $y = x^2e^{\lambda x}$ eine Lösung ist. Allgemein findet man für Wurzeln λ der Vielfachheit σ die Lösungen

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{\sigma-1}e^{\lambda x} \; .$$

Damit haben wir das Pendant zu Satz 2.2.

Satz 4.4.1 *Die Gleichung (4.5) habe die paarweise verschiedenen Wurzeln* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *mit den Vielfachheiten* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$*. Dann bilden die* n *Funktionen*

$$x^\ell e^{\lambda_k x} \quad , \qquad k = 1, \ldots, m \; , \quad \ell < \sigma_k \tag{4.7}$$

ein Fundamentalsystem für (4.1).

Beweis: Dieser könnte dadurch geschehen, daß man die Wronskische Determinante der n Funktionen (4.7) berechnet. Einfacher ist aber ein Rückgriff auf Satz 2.2. Nach diesem Satz muß es ein Fundamentalsystem der Form (4.7) geben - eventuell mit anderen Polynomen $p_{k,\ell}$ vom Grade $\leq \ell$ an Stelle von x^ℓ, $\ell = 0, \ldots, \sigma_k - 1$. Diese müßten aber linear unabhängig sein, weil sonst die Funktionen $p_{k,\ell}\, e^{\lambda_k x}$ keinen Unterraum der Dimension n aufspalten könnten. Also ließen sich die x^ℓ aus den $p_{k,\ell}$, $\ell = 0, \ldots, \sigma_k - 1$, linear kombinieren.

$\square$

4.5 Differentialgleichungen mit Singularitäten

In der mathematischen Physik treten häufig lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung auf, deren Koeffizienten an einer Stelle - etwa 0 - Pole haben. Sie sind von der Form

$$y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0 \; . \tag{5.1}$$

Dabei sind p, q in einer Umgebung von 0 in Potenzreihen entwickelbar. Es ist also

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell x^\ell \quad , \quad q(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell x^\ell \quad , \quad |x| < r \; .$$

Das einfachste Beispiel einer solchen Differentialgleichung ist die Eulersche Gleichung

$$y'' + \frac{p_0}{x} y' + \frac{q_0}{x^2} y = 0 \; .$$

Mit dem Ansatz $y = x^\rho$ erhalten wir

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0 \; . \tag{5.2}$$

Hat diese Gleichung zwei verschiedene Wurzeln ρ_1, ρ_2, so sind

$$y_1 = x^{\rho_1} \quad , \quad y_2 = x^{\rho_2} \tag{5.3}$$

jedenfalls für $x \neq 0$ Lösungen. Ihre Wronski-Determinante ist

$$W(x) = (\rho_2 - \rho_1) x^{\rho_1 + \rho_2 - 1} \; ,$$

so daß also (5.3) für $\rho_2 \neq \rho_1$ ein Fundamentalsystem ist. Dem Falle $\rho_1 = \rho_2$ nähern wir uns durch Grenzübergang $\rho_2 \to \rho_1$. Wir bilden

$$\lim_{\rho_2 \to \rho_1} \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \left(x^{\rho_2} - x^{\rho_1} \right) = \frac{d}{d\rho} x^\rho |_{\rho = \rho_1} = \log x \cdot x^{\rho_1}$$

und wir vermuten daher, daß in dem Fall $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$y_1 = x^\rho \quad , \quad y_2 = \log x \cdot x^\rho \tag{5.4}$$

ein Fundamentalsystem bilden. Dies ist leicht verifiziert:

$$y_2' = x^{\rho-1}(1 + \rho \log x) \; , \;\; y_2'' = x^{\rho-2}(2\rho - 1 + \rho(\rho - 1) \log x) \; ,$$

$$y_2'' + \frac{p_0}{x} y_2' + \frac{q_0}{x} y_2 = x^{\rho-2}(((\rho - 1)\rho + p_0 \rho + q_0) \log x + 2q - 1 + p_0) \; .$$

Der Faktor von $\log x$ verschwindet wegen (5.2), und $2q - 1 + p_0 = 0$ wegen $\rho = \frac{1-p_0}{2}$ im Falle $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Die Wronski-Determinante von (5.4) berechnet sich zu

$$W(x) = x^{2\rho - 1} .$$

Also ist (5.4) tatsächlich ein Fundamentalsystem.

Für die allgemeine Gleichung (5.1) macht man den Ansatz

$$y = x^\rho \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^\ell \tag{5.5}$$

und versucht ρ und die Koeffizienten a_ℓ so zu bestimmen, daß (5.1) erfüllt ist. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} y' &= x^{\rho-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\rho + \ell) a_\ell x^\ell \\ y'' &= x^{\rho-2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\rho + \ell - 1)(\rho + \ell) a_\ell x^\ell \end{aligned}$$

und setzen dies in (5.1) ein. Nach Kürzung um den Faktor $x^{\rho-2}$ ergibt sich

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\rho + \ell - 1)(\rho + \ell) a_\ell x^\ell + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{\ell=0}^{\infty} (\rho + \ell) a_\ell x^\ell + \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^\ell = 0 .$$

Der Faktor von x^m in dieser Summe ist

$$(\rho + m - 1)(\rho + m) a_m + \sum_{\ell=0}^{m} (\rho + \ell) a_\ell p_{m-\ell} + \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell q_{m-\ell} .$$

Wenn y eine Lösung sein soll, muß dieser verschwinden. Fassen wir die Koeffizienten von a_m zusammen, so bekommen wir also

$$((\rho+m-1)(\rho+m)+(\rho+m)p_0+q_0)a_m+\sum_{\ell=0}^{m-1}((\rho+\ell)p_{m-\ell}+q_{m-\ell})a_\ell = 0 . \tag{5.6}$$

Dies ist eine Rekursion für die a_m. Für $m = 0$ lautet sie

$$((\rho - 1)\rho + \rho p_0 + q_0) a_0 = 0 .$$

Wir wählen ρ als Nullstelle von (5.2) und können dann $a_0 = 1$ setzen. Danach können wir die a_m der Reihe nach aus (5.6) bestimmen, falls

$$(\rho + m - 1)(\rho + m) + (\rho + m)p_0 + q_0 \neq 0 \ , \qquad m = 1, 2, \ldots \ . \tag{5.7}$$

Wir wollen nun annehmen, die Wurzeln ρ_1, ρ_2 seien so geordnet, daß Re $\rho_1 \geq$ Re ρ_2. Für $\rho = \rho_1$ ist (5.7) dann immer erfüllt. Denn in diesem Fall ist ρ_1 die Wurzel von (5.2) mit dem größten Realteil, so daß also $\rho_1 + m$ für $m > 0$ keine weitere Wurzel von (5.2) sein kann und ρ_1 damit (5.7) erfüllen muß. Für $\rho = \rho_2$ muß man aber zusätzlich fordern, daß nie $\rho_2 + m = \rho_1$ wird. Damit haben wir

Satz 4.5.1 *Seien ρ_1, ρ_2 die - möglicherweise zusammenfallenden - Wurzeln von (5.2), und sei Re $\rho_1 \geq$ Re ρ_2. Für $\rho = \rho_1$ kann man dann die Koeffizienten a_m in (5.5) so bestimmen, daß $a_0 \neq 0$ und (5.1) formal (d.h. ohne Nachprüfen der Konvergenz von (5.5)) erfüllt ist. Dies kann durch rekursives Auflösen von (5.5) geschehen.*

Für $\rho = \rho_2$ gilt dies nur, wenn $\rho_1 - \rho_2$ nicht ganzzahlig ist.

Bemerkung:

1) Konvergiert die aus (5.5) berechnete Reihe für $|x| < r$, so stellt sie dort eine Lösung dar. Denn eine Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzbereiches, einschließlich sämtlicher formal differenzierter Reihen, absolut und gleichmäßig.

2) Im Fall $\rho = \rho_2$, $\rho_1 - \rho_2$ ganz hat man keine Lösung der Form (5.5) mehr. Wie auf Grund des Beispiels der Eulerschen Differentialgleichung zu vermuten ist, muß man an Stelle von (5.5) den Ansatz

$$y = x^{\rho_1} \log x \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^\ell + x^{\rho_2} \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell x^\ell$$

machen. Dies wollen wir nicht weiter verfolgen. Als Beispiel behandeln wir

die Besselsche Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y = 0 \ , \qquad \nu > 0 \ \text{reell} \ . \tag{5.8}$$

Die Gleichung (5.2) für ρ lautet $\rho^2 = \nu^2$, also $\rho_1 = \nu$, $\rho_2 = -\nu$. (5.6) lautet für $\rho = \rho_1$

$$\begin{aligned} m(2\nu + m)a_m + a_{m-2} &= 0 \quad , \quad m \geq 2 \, , \\ (2\nu + 1)a_1 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Mit $a_0 = 1$ folgt

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{4^m m!(\nu + m) \cdots (\nu + 1)!} \, , \quad a_{2m+1} = 0 \, .$$

Mit Hilfe der Γ-Funktion kann dies eleganter geschrieben werden. Es ist $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, also

$$\Gamma(\nu + m + 1) = (\nu + m) \cdots (\nu + 1)\Gamma(\nu + 1)$$

und damit

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + 1)}{m!\Gamma(\nu + m + 1)} \, .$$

Dividieren wir noch durch $2^\nu \Gamma(\nu + 1)$, so ergibt sich als Lösung von (5.8)

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \, .$$

J_ν heißt Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung ν. Ist ν nicht halbzahlig, so bilden J_ν, $J_{-\nu}$ ein Fundamentalsystem von (5.8). Ist ν halbzahlig, so tritt an Stelle von $J_{-\nu}$ die logarithmusbehaftete Bessel-Funktion 2. Art Y_ν auf.

4.6 Die Laplace-Transformation

Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich auch durch Laplace-Transformation lösen. Diese Rechenmethode führt zwar letzten Endes zu den gleichen Resultaten wie die in §5 beschriebenen Methoden. Sie ist aber bei Anwendern beliebt und weit verbreitet und soll daher kurz geschildert werden.

Sei f eine Funktion auf $[0, \infty)$. Dann heißt

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{6.1}$$

die Laplace-Transformation von f. Man schreibt auch

$$F = \mathcal{L}f \quad , \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \; , \quad f \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F.$$

Wir bezeichnen die Laplace-Transformation immer mit dem jeweiligen Großbuchstaben. Andere (z.B. Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. 2. Auflage, Oldenbourg, München 1961) machen es gerade umgekehrt.

Existiert das uneigentliche Integral (6.1) absolut für ein s, so konvergiert es absolut für alle größeren s. Sei σ das Infimum aller Werte von s, für welche (6.1) absolut konvergiert. σ heißt Konvergenzabzisse. **Beispiele:**

1) $f = 1$, $F = \frac{1}{s}$.

2) $f = e^{at}$, $F = \frac{1}{s-a}$. Durch Differentiation nach a folgt sofort das Paar $te^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$. Weiter folgt durch Differenzbildung

$$\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; e^{at} - e^{bt}$$

oder

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}) \; .$$

Es folgt das Paar sin$hat \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2-a^2}$.

3) $f = \cosh\, at$, $F(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$.

4) $f(t) = H(t-a) = \begin{cases} 1 & , \quad t \geq a \; , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \; , \end{cases} \qquad F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$.

5) $f(t) = H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 1 & , \quad a \leq t \leq b \; , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \; , \end{cases} \qquad F(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$.

6) $f(t) = H(t) - 2H(t-a) + 2H(t-2a) - + \cdots$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s}(1 - 2e^{-as} + 2e^{-2as} - 2e^{-3as} + - \cdots) \\
&= \frac{1}{s}\left(2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-aks} - 1\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(\frac{2}{1+e^{-as}} - 1\right) = \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-sa}}{1+e^{sa}} = \frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}\ .
\end{aligned}
$$

7) $f = \delta(t-a)$, $\delta =$ Diracsche δ-Funktion

$\delta(t) = 0\ ,\quad t \neq 0\ ,$ aber $\int \delta(t)dt = 1$, oder, allgemeiner,

$$\int \delta(t)f(t)dt = f(0)\ .$$

Durch Anwendung dieser Regel erhält man $F = e^{-sa}$.

8) $f(t) = \sin(at)$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin(at)dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Wir stellen nun die Eigenschaften der Laplace-Transformation in einem Satz zusammen.

Satz 4.6.1 *Sei $F = \mathcal{L}f$. Dann gilt*

(1) $\mathcal{L}f^{(k)} = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}$

(2) $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$

(3) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

(4) $\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} F(s)$

Beweis:

(1) Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^\infty e^{-st} f^{(k)}(t)dt = s \int_0^\infty e^{-st} f^{(k-1)}(t)dt - f^{(k-1)}(0)$$

und das Resultat folgt durch rekursive Anwendung dieser Formel.

Die weiteren Aussagen **(2)-(4)** verstehen sich von selbst.

$\square$

Beispiele:

1) Aus $te^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{(s-a)^2}$ folgt aus (1)
sofort $(1+at)e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{(s-a)^2}$.

2) Aus $\sin at \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{a}{s^2+a^2}$ folgt aus (1)
sofort $\cos at \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2+a^2}$.

Für zwei auf $[0, \infty)$ definierte Funktionen f, g führen wir die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

ein. Ihre Beziehung zur Laplace-Transformation ist für die Anwendungen von großer Bedeutung.

Satz 4.6.2 *Sei $F = \mathcal{L}f$ und $G = \mathcal{L}g$. Dann ist*

$$\mathcal{L}(f * g) = FG \ .$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)dt &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty g(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)dt d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}F(s)d\tau = F(s)G(s) \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur Frage der Umkehrung der Laplace-Transformation: Ist f durch $F = \mathcal{L}f$ eindeutig bestimmt? Dies ist in der Tat der Fall, ist aber mit unseren Mitteln schwer zu beweisen.

Satz 4.6.3 *Sei $F = \mathcal{L}f$. Dann gilt für $x > \sigma$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}F(s)ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Beweis: Siehe z.B. Doetsch.

□

Die inverse Laplace-Transformation $\mathcal{L}^{-1}$ kann man durch Tafeln (z.B. Doetsch, G.) oder numerische Methoden gewinnen.

Sei nun die Anfangswertaufgabe

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f \quad , \quad y(0) = y_0\ , \ \ \dot{y}(0) = y_1$$

in $t \geq 0$ vorgelegt. a, b seien konstant. Mit den Laplace-Transformationen Y, F von y, f erhält man sofort

$$s^2Y - sy_0 - y_1 + a(sY - y_0) + bY = F\ ,$$

also

$$Y(s) = \frac{(s+a)y_0 + y_1 + F(s)}{s^2 + as + b}\ .$$

Durch inverse Laplace-Transformation bekommt man nun y. Die Lösung einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wird also durch die Laplace-Transformation auf rein algebraische Manipulation zurückgeführt.

Beispiele:

1) $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ \dot{y}(0) = 0.$

Durch Laplace-Transformation entsteht

$$s^2Y - s - 6(sY - 1) + 9Y = 0\ \ ,$$

$$Y(s) = \frac{s-6}{s^2 - 6s + 9} = \frac{s-6}{(s-3)^2} = \frac{s}{(s-3)^2} - \frac{6}{(s-3)^2}\ .$$

Ein Blick auf unsere Beispiele - oder, besser, in einschlägige Tabellenwerke der Laplace-Transformation - zeigt

$$y(t) = (1+3t)e^{3t} - 6te^{3t} = (1-3t)e^{3t}$$

2) $\ddot{y} + 4\dot{y} = \cos 2t\ \ , \quad y(0) = 0\ , \ \ \dot{y}(0) = 1$

Laplace-Transformation liefert

$$\begin{aligned} s^2Y - 1 + 4sY &= \frac{s}{s^2+4} , \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2+4s}\left(1+\frac{s}{s^2+4}\right) . \end{aligned}$$

Diese Funktion zerlegen wir in Partialbrüche. Es folgt

$$Y(s) = \frac{1}{20}\,\frac{1}{s+4} - \frac{1}{20}\,\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s+4)} .$$

Auch hier reicht zur Rücktransformation unser Vorrat an Laplace-Transformationen aus. Wir finden

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{20}e^{-4t} - \frac{1}{20}\cos 2t + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}(1-e^{-4t}) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-4t} + \frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{20}\cos 2t . \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die allgemeine Gleichung n-ter Ordnung mit homogenen Anfangsbedingungen, also

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f , \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 . \end{gathered} \tag{6.2}$$

Sie geht durch Laplace-Transformation über in

$$P(s)Y(s) = F(s) \quad , \quad P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 .$$

Mit $Q = 1/P$ folgt

$$Y(s) = Q(s)F(s) . \tag{6.3}$$

Mit Q $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ q ergibt sich nach Satz 6.2 $y = q * f$ oder

$$y(t) = \int\limits_0^t q(t-\tau)f(\tau)d\tau .$$

Für $f(t) = \delta(t-t_o)$ ergibt sich also $y(t) = q(t-t_0)$. $q(t-t_0)$ ist also die Reaktion des Systems auf einem Impuls zur Zeit t_0. q heißt daher auch Impulsantwort.

In der Ingenieur-Literatur bezeichnet man Q als die Übertragungsfunktion des durch (6.2) beschriebenen linearen Systems. Man betrachtet dieses System als “black box” und charakterisiert es durch seine Übertragungsfunktion:

$$f \longrightarrow \boxed{\quad Q \quad} \longrightarrow y$$

Durch Hintereinanderschalten zweier Systeme mit Übertragungsfunktionen Q_1, Q_2 entsteht ein neues System

$$f \longrightarrow \boxed{\quad Q_1 \quad} \xrightarrow{y} \boxed{\quad Q_2 \quad} \longrightarrow z$$

Für die Laplace-Transformation gilt

$$Y = Q_1 F \ , \quad Z = Q_2 Y \ , \ \text{ also } \ Z = Q_1 Q_2 F \ .$$

Damit wirkt das zusammengesetzte System wie ein einfaches mit der Übertragungsfunktion $Q_1 Q_2$. Auch Rückkoppelungen kann man leicht behandeln. Betrachten wir z.B. das zusammengesetzte System

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r] & \boxed{\quad Q_1 \quad} \arrow[r, dash] & \arrow[r] \arrow[d, dash] & y \\ \arrow[u] & \boxed{\quad Q_2 \quad} \arrow[l, dash] & \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Durch Laplace-Transformation entsteht

$$(F + Q_2 Y) Q_1 = Y \ , \qquad \text{also } \ Y = \frac{Q_1}{1 - Q_1 Q_2} \, F$$

Das rückgekoppelte System ist also äquivalent einem einfachen System mit Übertragungsfunktion $Q_1/(1 - Q_1 Q_2)$.

Kapitel 5

Randwertaufgaben

5.1 Randwertaufgaben für lineare Systeme 1. Ordnung

Bei Anfangswertaufgaben stellt man Bedingungen an die Lösungen von Differentialgleichungen in einem einzigen Punkt, eben dem Anfangspunkt. Bei Randwertaufgaben stellt man Bedingungen an die Endpunkte eines Intervalls $[a, b]$. Für ein lineares System 1. Ordnung

$$y' + Q(x)y = f(x) \quad , \qquad a \leq x \leq b \qquad \text{(a)} \quad (1.1)$$

könnten diese etwa lauten

$$Ay(a) + By(b) = g \qquad \text{(b)} \quad (1.1)$$

mit (n, n)-Matrizen A, B und dem n-Vektor g. (1.1) heißt Randwertaufgabe. Für $f = 0$, $g = 0$ heißt (1.1) homogen, andernfalls inhomogen. Wir wollen Q, f als stetig in $[a, b]$ voraussetzen. Da die Lösungvon (1.1)(a) n freie Parameter enthält, wird man vermuten, daß (1.1) nur dann eindeutig lösbar ist, wenn (1.1)(b) mindestens n Bedingungen enthält. Man wird also

$$Rg(A, B) = n$$

voraussetzen. Aber auch dann ist eindeutige Lösbarkeit nicht gewährleistet, wie man an dem Beispiel

$$y' = f \quad , \qquad y(0) - y(1) = 0$$

sieht. Es ist nur lösbar für $\int\limits_0^1 f dx = 0$, und in diesem Fall nicht eindeutig.

Satz 5.1.1 *Entweder das inhomogene Problem (1.1) hat für jede Wahl von f, g eine eindeutig bestimmte Lösung. Oder aber das homogene Problem besitzt eine Lösung, die nicht identisch in $[a, b]$ verschwindet.*

Beweis: Sei Y ein Fundamentalsystem von (1.1)(a). Dann läßt sich jede Lösung von (1.1)(a) in der Form

$$y(x) = Y(x)\left\{c + \int\limits_a^x Y^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi\right\} \tag{1.2}$$

schreiben mit einem konstanten Vektor c. Diese Lösung erfüllt genau dann (1.1)(b), wenn c das lineare Gleichungssystem

$$(AY(a) + BY(b))c = g - BY(b)\int\limits_a^b Y^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi \tag{1.3}$$

löst. Ist $AY(a) + BY(b)$ nicht singulär, so ist c und damit y eindeutig bestimmt. Ist andererseits $AY(a) + BY(b)$ singulär, so gibt es ein $c \neq 0$ mit $(AY(a) + BY(b))c = 0$. Die Funktion $y = cY$ erfüllt dann das homogene Randwertproblem (1.1).

□

Satz 5.1.2 *Das homogene Randwertproblem (1.1) besitze nur die triviale Lösung. Dann gibt es eine (n, n)-Matrix $G(x, \xi)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $G(x, \xi)$ ist stetig für $x \le \xi$ und für $x \ge \xi$

2) $G(x, x + 0) - G(x, x - 0) = -I$

3) Für jedes f ist

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{1.4}$$

Lösung von (1.1) für $g = 0$.

Beweis: Nach (1.2), (1.3) hat die eindeutig bestimmte Lösung von (1.1) für $g = 0$ die Form

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(x)c + \int_a^x Y(x)Y^{-1}(\xi)f(\xi)d\xi \ , \\ c &= -(AY(a) + BY(b))^{-1}BY(b) \int_a^b Y^{-1}f(\xi)d\xi \ . \end{aligned}$$

Dies kann man in der Form (1.4) schreiben mit einem G der genannten Art.

□

Die Funktion G heißt Greensche Funktion der Randwertaufgabe (1.1).

5.2 Randwertprobleme linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir können nun Randwertprobleme der Art

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_0 y &= f \\ \sum_{\ell=0}^{n-1} (a_{k\ell}y^{(\ell)}(a) + b_{k\ell}y^{(\ell)}(b)) &= g_k \ , \quad k = 0, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit in $[a,b]$ stetigen Funktionen $p_0, \ldots, p_{n-1}$, f und Zahlen $a_{k\ell}$, $b_{k\ell}$, g_k betrachten. Durch Überführen in ein System 1. Ordnung bekommen wir sofort

Satz 5.2.1 *Entweder (2.1) ist für jede Wahl von f, g eindeutig lösbar. Oder das homogene Problem (2.1) (d.h. $f = 0$, $g = 0$) hat eine nichttriviale Lösung.*

Wir wollen die Greensche Funktion zu (2.1) berechnen. Sei $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem. Dann ist nach IV.4.4 die allgemeine Lösung

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \left\{ c_i + (-1)^{n+i} \int_a^x f(\xi) \frac{W_i(\xi)}{W(\xi)} d\xi \right\}$$

mit der Wronski-Determinante W von $y_1, \ldots, y_n$ und den aus W durch Streichen der i-ten Spalte und letzten Zeile entstandenen Determinanten W_i. Die c_i werden bestimmt durch die Randbedingungen in (2.1) mit $g_0 = \cdots = g_{n-1} = 0$. Ist das homogene Problem (2.1) nur trivial lösbar, sind sie eindeutig bestimmt und lassen sich in der Form

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \int_a^b f(\xi) \frac{W_j(\xi)}{W(\xi)} d\xi$$

schreiben. Damit nimmt y die Form

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

an mit

$$G(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} y_i(x) \frac{W_j(\xi)}{W(\xi)} + \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x) (-1)^{n+i} \frac{W_i(\xi)}{W(\xi)} & , \quad \xi \le x \, , \\ 0 & , \quad \xi > x \, . \end{cases}$$

Es gilt also für $k = 0, \ldots, n-1$

$$\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x, x+0) - \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x, x-0) = -\frac{1}{W(x)} \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)}(x) (-1)^{n+i} W_i(x) \, .$$

Für $k = n-1$ ist die Summe gerade die Entwicklung der Determinanten nach der letzten Zeile. Für $k < n$ ist die Summe die Entwicklung der Determinanten W,deren letzte Zeile durch ihre k-te Zeile ersetzt wurde und damit verschwindet.

Damit haben wir bewiesen

Satz 5.2.2 *Das homogene Problem (2.1) besitze nur die triviale Lösung. Dann gibt es eine Funktion $G(x, \xi)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) *$G(x, \xi)$ ist n mal stetig differenzierbar für $x \leq \xi$ und für $x \geq \xi$.*

2)
$$\frac{\partial G^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(x, x+0) - \frac{\partial G^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(x, x-0) = -1$$

3) *Für jedes f ist*
$$y(x) = \int\limits_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$
die Lösung von (2.1) mit $g_0 = \cdots = g_{n-1} = 0$.

Die Funktion G heißt wieder Greensche Funktion des Problems (2.1). Die Ingenieure nennen sie auch "Einflußfunktion". Ihre Bedeutung wird klar für $f(x) = \delta(x - x_0)$. Die "Lösung" von (2.1) ist dann

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x, \xi) \delta(\xi - x_0) d\xi = G(x, x_0) \ .$$

Natürlich ist y nicht Lösung in unserem Sinne, weil y nur $n-1$ mal stetig differenzierbar ist. y ist eine verallgemeinerte Lösung.

Beispiele: Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' + p_1 y' + p_0 y &= f \qquad \text{in} \quad a \leq x \leq b \ , \\ y(a) = y(b) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem mit $y_1(a) = 0$, $y_2(b) = 0$.

Wäre $W = y_1' y_2 - y_2' y_1 = 0$ für ein $x \in [a, b]$, so wäre W überhaupt 0, insbesondere also bei a, also $y_1'(a) y_2(a) = 0$. Es kann nicht $y_1'(a) = 0$ sein, da sonst $y_1 = 0$ wäre. Also ist $y_2(a) = 0$ und damit y_2 Lösung der homogenen Aufgabe. Ist diese also nur trivial lösbar, so muß $W \neq 0$ sein.

Nach IV.4.4 ist dann

$$y(x) = y_1(x) \int_x^b f(\xi)\, \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)}\, d\xi + y_2(x) \int_a^x f(\xi)\, \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)} d\xi$$

Lösung der Randwertaufgabe. Also ist

$$G(x,\xi) = \frac{1}{W(x)} \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi) & , \quad \xi \geq x \\ y_2(x) y_1(\xi) & , \quad \xi < x\ . \end{cases}$$

Im Falle $p_1 = p_0 = 0$ haben wir $y_1(x) = x - a$, $y_2(x) = b - x$, $W = a - b$, also

$$G(x,\xi) = \frac{1}{a-b} \begin{cases} (x-a)(b-\xi) & , \quad \xi \geq x \\ (b-x)(a-\xi) & , \quad \xi < x \end{cases}$$

Sie beschreibt die Auslenkung einer bei a, b fest eingespannten Saite unter einer Last an der Stelle ξ. Hat man eine verteilte Last $f(\xi)$, so ergibt sich die Auslenkung durch Überlagerung zu

$$\int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi\ .$$

5.3 Eigenwertprobleme

Das zu (2.1) gehörige Eigenwertproblem lautet

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_0 y &= \lambda y \quad , \quad a \le x \le b \\ \sum_{\ell=0}^{n-1} (a_{k\ell} y^{(\ell)}(a) + b_{k\ell} y^{(\ell)}(b)) &= 0 \quad , \quad k = 0, \ldots, n-1 \; . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Gesucht sind Zahlen λ, für welche (3.1) eine nichttriviale Lösung y hat. Solche λ's heißen Eigenwerte, die zugehörigen y's Eigenfunktionen von (3.1).

Wir betrachten den Spezialfall

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y \quad \text{in} \quad [0, \pi] \; , \\ y(0) &= 0 \; , \qquad y(\pi) = 0 \; . \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\lambda = 0$ ist sicher kein Eigenwert. Für $\lambda \neq 0$ ist $\sin \sqrt{\lambda} x$, $\cos \sqrt{\lambda} x$ bei beliebiger Bestimmung der Wurzel ein Fundamentalsystem. Also hat jede Lösung der Differentialgleichung die Form

$$y = c_1 \; \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \; \cos \sqrt{\lambda} x \; .$$

Die Randbedingungen ergeben $c_2 = 0$ und $c_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$. $c_1 = 0$ führt zur trivialen Lösung. Für $c_1 \neq 0$ folgt $\sqrt{\lambda} = k$ mit ganzem k. $k = 0$ ergibt wieder die triviale Lösung. $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ergibt die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\lambda_k = k^2 \quad , \qquad y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \sin kx \; , \quad k = 1, 2, \ldots \; .$$

(3.2) hat also unendlich viele Eigenwerte λ_k und zu jedem Eigenwert genau eine lineare unabhängige Eigenfunktion y_k.

Aber (3.2) hat noch viel mehr Struktur. Führen wir den Hilbertraum $H = L_2(0, \pi)$ ein, also den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf $(0, \pi)$ mit dem inneren Produkt

$$(u, v) = \int_0^\pi u \bar{v} dx \; .$$

Dann bilden die y_k ein Orthonormalsystem in H, also

$$(y_k, y_\ell) = \begin{cases} 1 & , \quad k = \ell \ , \\ 0 & , \quad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Dieses Orthonormalsystem ist überdies vollständig, d.h. für jedes $y \in L_2(0, \pi)$ gilt

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \quad , \qquad c_k = (y, y_k) \ .$$

Damit besteht eine vollständige Analogie zum Eigenwertproblem reell - symmetrischer Matrizen der Ordnung n. Diese haben n Eigenwerte, und die zugehörigen - passend gewählten - Eigenvektoren bilden eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^n$.

Literaturverzeichnis

1 Lehrbücher zur Vorlesung

- **Walter, W.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  - Eine Einführung -
  Heidelberger Taschenbücher, Springer 1993.
- **Heuser, H.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  B.G. Teubner, Stuttgart 1989.

2 Weitere Lehrbücher

- **Kamke, E.:** Differentialgleichungen. *Lösungsmethoden und Lösungen.*
  7. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.G., Leipzig 1961.
- **Amann, H.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  Walter de Gruyter, 1983.
- **Brauer, F. - Nohel, J.A.:** Ordinary Differential Equations.
  Benjamin 1967.
- **Brauer, F. - Nohel, J.A.:** Elementary Differential Equations: Principles, Problems, and Solutions.
  Benjamin 1968.
- **Braun, M.:** Differential equations and Their Applications.
  Springer 1975.
- **Carrier, G.F. - Pearson, C.E.:** Ordinary Differential Equations.
  SIAM 1991.

- **Horn, J. - Wittich, H.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  BI 1964.
- **Erwe, F.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  BI 1964.
- **Collatz, L.:** Differentialgleichungen.
  - Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen -
  Teubner 1967.
- **Arnold, V.I.:** Ordinary Differential Equations.
  MIT Press 1978.
- **Petrovski, I.G.:** Ordinary Differential Equations.
  Prentice-Hall 1966.
- **Knobloch, H.W. - Kappel, I.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  Teubner 1974.
- **Werner, H. - Arndt, H.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen.
  Springer 1986.
- **Forster, O.:** Analysis 2.
  Vieweg 1984.
- **Aulbach, B.:** Gewöhnliche Differentialgleichungen,
  Spektrum Akademischer Verlag 1997.

3 Monographien

- **Coddington, E.A. - Levison, N.:** Theory of Ordinary Differential Equations.
  McGraw Hill 1955.
- **Hartman, P.:** Ordinary Differential Equations.
  Wiley 1964.
- **Hale, J.K.:** Ordinary Differential Equations.
  Wiley 1969.
- **Ince, E.L.:** Ordinary Differential Equations.
  Longmans 1926, Dover 1956.

- **Pontryagin, L.S.:** Ordinary Differential Equations.
  Addison-Wesley 1962.
- **Bluman, G.W. - Kumei, S.:** Symmetries and Differential Equations.
  Springer 1989.
- **Arnold, V.I.:** Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer 1983.
- **Forsyth, A.R.:** Theory of Differential Equations, vol. I, II, III. Dover 1959.