Aufgaben GDGL SS 1998

Frank Wübbeling

17. September 1998

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Stellen Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung auf für die Schar der Parabeln mit der x-Achse als Achse und dem Ursprung als Brennpunkt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Differentialgleichungen

(a) $y' = xy^2$ (b) $y^2y' = x^2$ (c) $x^2y'' - xy' + y = 0$

die Lösungen

(a) $y = \frac{2}{2-x^2}$ (b) $y = (x^3+8)^{1/3}$ (c) $y = x - x\ell n\, x$

besitzen. In welchen Intervallen sind diese Lösungen gültig?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei f stetig in $[a, b]$ und y_k die Approximation der Polygonzugmethode für die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x) \quad , \quad y(a) = 0 \; .$$

Sei $x \in [a, b]$. Zeigen Sie: Für $h \to 0$ und $k \to \infty$, so daß $hk = x - a$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y(x) \; ,$$

wo

$$y(x) = \int\limits_a^x f(s)ds$$

Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Stellen Sie eine Differentialgleichung 2. Ordnung auf für die Schar der Kreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse und beliebigem (!) Radius.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Seien a, c konstant und $s(x) = (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)e^{cx}$.
Zeigen Sie, daß es immer eine Lösung von $y' = ay + s$ der Form

$$x^r(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)e^{cx}$$

mit $r = 0$ für $a \neq c$ und $r = 1$ für $a = c$ gibt und berechnen Sie eine solche.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß der lineare Raum aller Funktionen aus $C(0,1]$ mit beschränkter Norm

$$\|f\| = \sup_{(0,1]} |\frac{1}{x} f(x)|$$

ein Banachraum ist.

(b) Sei $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^1)$ und für $0 < x \leq 1$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^1$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \frac{L}{x}|y_1 - y_2| \, , \qquad L < 1 \, .$$

Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \, , \qquad y(0) = y_0$$

genau eine Lösung besitzt.

Aufgabe 7: (5 Punkte)
Sei $D_M = \{y \in C^1[a,b] \, : \, \int_a^b (y^2 + y'^2)dx \leq M^2\}$.
Zeigen Sie: D_M ist relativ kompakt in $C[a,b]$ (mit der Norm des maximalen Betrages).

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

$$\text{(a)} \quad y' = 2xy + x \, , \quad y(0) = 1 \qquad \text{(b)} \quad y' = \frac{2}{x}y + 2x^3 \, , \quad y(2) = 20 \, .$$

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Die Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar sind diejenigen Kurven, welche jede Kurve der Schar orthogonal schneiden.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Orthogonaltrajektorien der Schar $F(x,y,c) = 0$.

(b) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien der Hyperbelschar
$$y^2 - x^2 = c^2 \ .$$

(c) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf für die Orthogonaltrajektorien der Schar aus Aufgabe 1.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben:
$$\begin{array}{llcllcll}
(a) & y' & = & y^2 - 1 & , & y(0) & = & \frac{1}{3} \ , \\
(b) & y' & = & -\frac{y}{x^2-4x} & , & y\left(\frac{81}{20}\right) & = & 1 \ , \\
(c) & y' & = & \frac{y-\sqrt{x^2-y^2}}{x} & , & y(1) & = & 0 \ , \\
(d) & y' - y & = & xy^5 & , & y(0) & = & 1 \ .
\end{array}$$

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Sei $a \in C(I)$ und $x_0 \in I$. $y \in C^1(I)$ erfülle
$$y' \leq a(x)y \quad , \quad y(x_0) \leq y_0 \ .$$
Zeigen Sie: In I gilt
$$y \leq y_0 e^A \quad , \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi \ .$$
<u>Hinweis:</u> Sei z die Lösung von $z' = az$, $z(x_0) = y_0$. Betrachten Sie die Funktion y/z.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Seien φ_i, ψ_i stetig differenzierbare Funktionen mit $\psi_0\varphi_1 - \psi_1\varphi_0 \neq 0$. Geben Sie eine Riccatische Differentialgleichung an, so daß für alle Konstanten c_1, c_0, welche nicht beide verschwinden, die Funktion
$$y = \frac{\psi_0 c_0 + \psi_1 c_1}{\varphi_0 c_0 + \varphi_1 c_1}$$
Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung
$$xy^3 + y - 2xy' = 0$$
einen integrierenden Faktor und konstruieren Sie damit Lösungen, die nicht identisch verschwinden.

Aufgabe 14: (4 Punkte)

Lösen Sie folgende Anfangswertaufgaben:

(a) $y'e^y - x - x^3 = 0$, $y(1) = 1$.

(b) $y'y + (1 + y^2)\sin x = 0$, $y(0) = 1$.

Aufgabe 15: (4 Punkte)

Lösen Sie die logistische Differentialgleichung aus Abschnitt 1 in Kapitel I mit den Methoden aus Abschnitt 1 in Kapitel III.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Die Kurven der Schar

$$r = c(1 + \cos\varphi)$$

nennt man Kardioiden (r,φ bedeuten Polarkoordinaten, d.h. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$). Zeigen Sie: Die Orthogonaltrajektorien dieser Schar sind ebenfalls Kardioiden.

Kardioiden für $c = 1$ und $c = 2$

Hinweis: Am besten schreiben Sie die allgemeine Form der Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien aus Aufgabe 9 in Polarkoordinaten auf.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung $pdx + qdy = 0$ mit p, $q \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(a) Hängt $f = (p_y - q_x)/q$ nur von x ab, so gibt es einen integrierenden Faktor der Form $M = M(x)$.

(b) Hängt $g = (p_y - q_x)/p$ nur von y ab, so gibt es einen integrierenden Faktor der Form $M = M(y)$.

(c) Hängt $h = (p_y - q_x)/(xp - yq)$ nur von xy ab, so gibt es einen integrierenden Faktor der Form $M = M(xy)$.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen durch integrierende Faktoren nach Aufgabe 17:

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \\
&(b) \qquad y' = \frac{3x^2(y-x)^2 - \sin x + x\cos x}{3x^2(y-x)^2} \\
&(c) \qquad y' = -\frac{3xy + 4x^2y^2}{2x^2 + 3x^3y} \\
&(d) \qquad y' = -\frac{\cos x}{4ye^{-y} + \sin x}
\end{aligned}$$

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{4x + 3y - 1}{3x + 4y + 1}\ .$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Lösen Sie

$$y' = -\frac{2x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$$

(a) als homogene Differentialgleichung.

(b) als exakte Differentialgleichung.

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Sei $c(t) = a(t) + ib(t)$. Wir betrachten die komplexe Differentialgleichung $z' = cz$.

(a) Schreiben Sie ein äquivalentes lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil von z auf.

(b) Zeigen Sie, daß $v(t) = |z(t)|^2$ einer linearen Differentialgleichung genügt.

(c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Systems aus (a) mit

$$a = \cos t \quad , \quad b = \sin t$$

und berechnen Sie dessen Wronski-Determinante.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Seien $a,\, b \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit $a^2 + b^2 > 0$. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist genau dann Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$aw_x + bw_y = 0\ ,$$

wenn w entlang aller Lösungen von $x' = a(x,y)$, $y' = b(x,y)$ konstant ist.

(b) Sei $C : x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $0 \le s \le 1$, eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit φ, $\psi \in C^1[0,1]$ und $a(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) - b(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) \neq 0$. Zeigen Sie, daß es in einer Umgebung von C eine Lösung w der partiellen Differentialgleichung gibt, welche entlang C vorgeschriebene Werte $w(\varphi(s), \psi(s)) = \chi(s)$, $\chi \in C^1[0,1]$ annimmt.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $A(t)$ eine stetige (n,n)-Matrix mit der Periode p, d.h. $A(t+p) = A(t)$. Sei Y ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine invertierbare Matrix C mit $Y(t+kp) = Y(t)C^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zu jedem Eigenwert λ von C gibt es eine Lösung y von $y' = Ay$ mit $y(t+p) = \lambda y(t)$.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Sei $A(t)$ eine im Intervall J stetige schiefsymmetrische (d.h. $A^T = -A$) Matrix, und sei Y ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Zeigen Sie: Ist Y unitär (d.h. $Y^T Y = I$) für ein $x_0 \in J$, so ist Y unitär in ganz J.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei A die (n,n)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Dabei seien $a_0, \dots, a_{n-1}$ komplexe Zahlen.

Das Polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Zeigen Sie: Die Jordansche Normalform von A besteht aus m Jordan-Kästchen der Längen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei λ ein Eigenwert von A und $c_1, \dots, c_r$ linear unabhängige Hauptvektoren zu λ, d.h.

$$(A - \lambda I)c_k = c_{k-1} \ , \qquad k = 1, \dots, r \ , \quad c_0 = 0 \, .$$

Zeigen Sie, daß

$$y_k(x) = (c_k + x c_{k-1} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} c_1) e^{\lambda x} \ , \quad k = 1, \dots, r \, ,$$

linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$ sind.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Das System

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \tag{1}$$

besitze eine Lösung u mit $u_1 \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist z eine Lösung von

$$z_i' = \sum_{j=2}^{n} (a_{ij} - \frac{u_i}{u_1} a_{1j}) z_j \ , \qquad i = 2, \dots, n \ , \tag{2}$$

so ist

$$y_i = \phi(x) u_i + z_i \ , \qquad z_1 = 0 \ , \quad \phi'(x) = \frac{1}{u_1} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j \tag{3}$$

eine Lösung von (1).

(b) Ein Fundamentalsystem von (2) ergibt via (3) zusammen mit u ein Fundamentalsystem von (1).

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Geben Sie ein Fundamentalsystem an für das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + \tfrac{1}{2} y_2 - \tfrac{1}{2} y_3 + 1 \\ y_2' &= \tfrac{3}{2} y_2 - \tfrac{1}{2} y_3 - 2 \\ y_3' &= \tfrac{1}{2} y_2 + \tfrac{1}{2} y_3 + x \end{aligned}$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1(0) = 0 \ , \quad y_2(0) = 1 \ , \quad y_3(0) = -1 \ .$$

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Berechnen Sie für die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung

$$y'' + \frac{\beta - x}{x} y' - \frac{\alpha}{x} y = 0 \quad , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

im Falle nicht ganzzahliger β ein Fundamentalsystem. Zeigen Sie, daß die Reihen für alle x konvergieren.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie durch Potenzreihenentwicklung die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$(1 + x) y' - \alpha y = 0 \quad , \qquad y(0) = 1 \ .$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die binomische Formel

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \,.$$

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei J_ν die Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung ν. Zeigen Sie:

$$J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \quad , \qquad x > 0 \,.$$

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \cos\omega t \quad , \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

mit reellen Konstanten a, b, ω. Zeigen Sie: Für $a > 0$, $b > 0$ gibt es reelle Zahlen δ, c, so daß für $t \to \infty$

$$y(t) - c\cos(\omega t + \delta) \to 0 \,.$$

Berechnen Sie δ, c.

Aufgabe 33: (4+4+5 Punkte)
Lösen Sie folgende Anfangswertaufgaben. Auf welchen Intervallen sind die Lösungen gültig?

(a) $y' = xy^3 \ , \ y(0) = 1$

(b) $y' = (x+y)^2 \ , \ y(0) = 0$

(c) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right),\ y(1) = c.$ Dabei sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und c eine reelle Zahl mit $c = f(c)$.

Aufgabe 34: (11 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und y die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y) \ , \quad y(0) = a$$

in einer Umgebung U von $x = 0$. Zeigen Sie: Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial a}(x_0) \neq 0$$

in ganz U.

Aufgabe 35: (4+4 Punkte)
Sei $\mathcal{L}$ die Laplace-Transformation. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in C[0,\infty)$ absolut beschränkt und $g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, so ist

$$\mathcal{L}g = \frac{1}{s}\mathcal{L}f \ .$$

(b) Die Aufgabe (a konstant)

$$a\int\limits_0^t y(\tau)d\tau + y(t) = 1$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $y \in C[0,\infty)$, und für diese gilt

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{1}{a+s}$$

Aufgabe 36: (8 Punkte)
Sei $q \in C[a,b]$ und $q > 0$. Sei y eine Lösung von

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{in} \quad [a,b] \ ,$$

die nicht identisch verschwindet. Zeigen Sie: y hat in $[a,b]$ höchstens eine Nullstelle.

Aufgabe 37: (5+5 Punkte)
Seien a_1, a_2 stetige Funktionen mit der Periode p. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \ .$$

Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem. Zeigen Sie:

(a) Es gibt Konstanten c_{ij}, so daß für alle x

$$y_i(x+p) = c_{1i}y_1(x) + c_{2i}y_2(x) \ , \qquad i = 1,2 \ .$$

(b) Zu jedem Eigenwert λ der Matrix $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ gibt es eine Lösung mit $y(x+p) = \lambda y(x)$.

Aufgabe 38: (7+3 Punkte)

(a) Berechnen Sie durch Potenzreihenentwicklung die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' - a^2y = 0 \ , \qquad a = \text{ const. } \neq 0 \ ,$$

$y(0) = 0,\ y'(0) = a.$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) die Formel

$$\sinh(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Aufgabe 39: (11 Punkte)
Wir betrachten das System

$$y_1' = ay_1 \; ; \qquad y_2' = 2y_1 + ay_2$$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es bleiben für jede Lösung genau dann $|y_i(x)|$, $i = 1, 2$, für $x \to \infty$ beschränkt, wenn $\mathrm{Re} a < 0$ gilt.

Aufgabe 40: (6 Punkte)
Geben Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = e^x + 1 + x \; , \qquad \omega \text{ konstant} \; , \quad (\omega \neq 0)$$

an.

Bemerkung: Die Klausur ist bestanden, wenn 25 Punkte erreicht werden.