Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc Marcel Koch

04.11.2019

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2019/20 — Blatt 1

Abgabe: 11.11.2019, 10:00 Uhr, Briefkasten 112
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.

Definition 1 (Stabilität stationärer Lösungen)

Eine stationäre Lösung x^* der Differentialgleichung $x' = f(x)$ heißt *stabil*, falls zu jeder Umgebung U von x^* eine Umgebung V von x^* existiert, so dass für jede Lösung der Anfangswertprobleme

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0 \in V$$

gilt $x(t) \in U$ für alle $t > 0$. Andernfalls heißt die Lösung *instabil*.

Aufgabe 1 (Stabilität linearer Systeme von GDL) (5 Punkte)

(a) Betrachten Sie folgendes System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$w' = Aw \quad mit\ w(0) = 0, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist. Unter welchen Bedingungen an A ist die stationäre Lösung $w^* \equiv 0$ stabil, unter welchen instabil?

(b) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die stationäre Lösung $w^* \equiv 0$ von (1) stabil ist, wenn

$$\mathrm{spur}(A) < 0, \quad \det(A) > 0.$$

(c) Betrachten Sie nun die zwei linearen gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$w' = Aw, \quad w' = Bw \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{2}$$

Geben Sie ein Beispiel für A und B an, so dass $w^* \equiv 0$ eine stabile Lösung beider Differentialgleichungen ist, aber instabil ist bezüglich der Differentialgleichung

$$w' = (A + B)w.$$

Aufgabe 2 (Turing-Instabilitäten) (6 Punkte)

Zwei wechselwirkende Substanzen mit Konzentrationen $a(x,t)$, $b(x,t)$ können durch ein Reaktions-Diffusions-System beschrieben werden, welches Sie in der Vorlesung als Turing-Modell kennengelernt haben. Wir betrachten den entdimensionalisierten Fall dieses Systems, d.h. das Anfangsrandwertproblem

$$\left.\begin{aligned} \partial_t a &= \Delta a + \gamma f(a.b) \\ \partial_t b &= d\Delta b + \gamma g(a,b) \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \times [0,T] \tag{3a}$$

mit Neumann-Randbedingungen

$$\nabla a \cdot n = 0, \quad \nabla b \cdot n = 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega \times [0,T] \tag{3b}$$

und Anfangsbedingungen

$$a(\cdot,0) = a^0, \quad b(\cdot,0) = b^0 \qquad \text{in} \quad \Omega. \tag{3c}$$

Die Konstante $\gamma > 0$ gibt die relative Stärke der Reaktionsterme im Vergleich zu den Diffusionstermen wieder. Die Diffusionskonstante d sei positiv.

Wir wollen die Turing-Instabilitäten des Systems (3) untersuchen. Wir suchen also stationäre Lösungen (a_0, b_0) von (3), die instabil für das volle System sind, obwohl sie eine stabile stationäre Lösung des diffusionslosen Systems

$$\partial_t a = \gamma f(a,b), \quad \partial_t b = \gamma g(a,b) \qquad \text{in} \quad \Omega \times [0,T] \tag{4}$$

mit den Anfangsbedingungen (3c), sind.

(a) Zunächst linearisieren Sie das System (4) um eine stationäre Lösung (a_0, b_0), so dass sich ein Differentialgleichungssystem $\partial_t w = Aw$ mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt. Geben Sie hinreichende Bedingungen an f und g an, damit eine stationäre Lösung stabil ist.

(b) Betrachten Sie nun das Schnakenberg-System mit

$$\begin{aligned} f(a,b) &:= \alpha - a + a^2 b, \\ g(a,b) &:= \beta - a^2 b, \end{aligned}$$

und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die positiven, stationären Lösungen (a_0, b_0), die homogen im Raum sind.

(c) Um eine Turing-Instabilität zu erhalten, muss noch die Linearisierung von (3) um (a_0, b_0) auf Instabilität untersucht. Im Falle $d \neq 1$ führt dies zu den zusätzlichen Bedingungen

$$d\, a_{11} + a_{22} > 0, \quad (d\, a_{11} + a_{22})^2 - 4d\,(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) > 0.$$

Leiten Sie die notwendigen Bedingungen für α und β her, damit im Schnakenberg-System eine Turing-Instabilität auftritt.