Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

10.01.2019

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 12

Abgabe: 18. Januar 2019, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Stabilität von Zeitschrittverfahren) (6 Punkte)

Wir betrachten die Wäremeleitungsgleichung auf einem Gebiet Ω mit Dirichlet-Randbedingung und $f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \qquad \text{in } \Omega \times [0,T] \tag{1}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \tag{2}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \qquad \text{in } \Omega \tag{3}$$

(a) Stellen Sie die schwache Formulierung zu diesem Problem auf.

(b) Bestimmen Sie das semi-diskrete (örtlich diskret, zeitlich kontinuierlich) System mit der vertikalen Linienmethode. Formulieren Sie das Ergebnis als System gewöhnlicher Differentialgleichungen in Matrix-Vektor-Form.

(c) Stellen Sie das explizite und implizite Eulerverfahren zur Lösung des semi-diskreten Problems auf. Beschreiben Sie die Lösung am $n+1$-ten diskreten Zeitschritt in expliziter Form: $u^{n+1} = P_u u^n + P_b b^n$. Mit Matrizen P_u und P_b und einem Datenvektor b^n. Geben Sie P_u, P_b und b^n an. Verwenden Sie dafür die Massematrix M_h und die Steifigkeitsmatrix A_h:

$$(M_h)_{i,j} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \qquad (A_h)_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$$

Dabei bezeichnen φ_i die Basisfunktionen des diskreten Ansatzraums.

(d) Falls $\|P_u\| \leq 1$ in geeigneter Norm, so ist das Verfahren stabil. Für welche Schrittweiten ist das explizite und implizite Eulerverfahren stabil?

Aufgabe 2 (Masse-Lumping) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die (inexakte) Auswertung der Elemente in der Massematrix mit einer Quadraturregel, die nur die Knoten als Quadraturpunkte enthält, ergibt eine Diagonalmatrix (sog. Masse-Lumping).

(b) Zeigen Sie: Auf Triangulierungen ohne stumpfe Innenwinkel ist die durch Masse-Lumping entstehende Systemmatrix $\tilde{M}_h + \delta_t A_h$ eine M-Matrix.

(c) Skizzieren Sie, warum der Lumping-Fehler $\tilde{u}^n - u^n$ von der Größenordnung $\mathcal{O}(h^2)$ ist. Dabei ist $\tilde{u}^n$ die Lösung mit Masse-Lumping und u^n die Lösung ohne Masse-Lumping.

(d) Berechnen Sie für $\Omega = [0, 1]$ auf einem äquidistanten Gitter mit $h = 0.2$ und linearen finiten Elementen die gelumpte Massematrix.