Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 1, Abgabe: Mittwoch, 25.10.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Rayleigh-Bénard-Konvektion
Betrachten Sie das folgende System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot u = 0\\
&\rho_0(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \eta \Delta u + \nabla p = \rho_0 g \beta (T - T_D) e_3\\
&\partial_t T - \alpha \Delta T + u \cdot \nabla T = 0
\end{aligned}$$

in einem horizontalen Streifen der Höhe h, d.h. $(x_1, x_2, x_3) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (0, h)$ und für $t \geq 0$. Hierbei ist ρ_0 die Massendichte, u die Geschwindigkeit, η die dynamische Viskosität, p der Druck, g die Erdbeschleunigung und $T_{(D)}$ die (Decken-)Temperatur. Am Boden und an der Decke des Streifens gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
T = T_B, \quad u = 0 \quad \text{falls} \quad x_3 = 0\\
T = T_D, \quad u = 0 \quad \text{falls} \quad x_3 = h.
\end{aligned}$$

(a) Was sind die Dimensionen von α und β?

(b) Entdimensionalisieren Sie so, dass das folgende System ensteht:

$$\begin{aligned}
&\hat{\nabla} \cdot \hat{u} = 0\\
&\frac{1}{Pr}(\partial_{\hat{t}} \hat{u} + \hat{u} \cdot \hat{\nabla} \hat{u}) - \hat{\Delta} \hat{u} + \hat{\nabla} \hat{p} = Ra \hat{T} e_3\\
&\partial_{\hat{t}} \hat{T} - \hat{\Delta} \hat{T} + \hat{u} \cdot \hat{\nabla} \hat{T} = 0
\end{aligned}$$

und $\hat{T}_B = 1$, $\hat{T}_D = 0$. Wie ändert sich die Höhe des Streifens? Wie sind Pr, die sogenannte Prandtl-Zahl, und Ra, die sogenannte Rayleigh-Zahl, definiert?

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir möchten die Bewegung von einem Planeten und der Sonne modellieren mithilfe von zwei Punkten $x_P(t)$ und $x_S(t)$. Die Massen von dem Planeten und der Sonne bezeichnen wir mit m_P beziehungsweise m_S. Die Bewegung des Planeten um die Sonne wird durch den orientierten Abstand

$$x(t) = x_P(t) - x_S(t)$$

beschrieben. Wir nehmen an, dass die zwei Körper nur mit Gravitation interagieren

$$f_{PS}(x_P, x_S) = -G_{m_S m_P} \frac{x_P - x_S}{\|x_P - x_S\|^3} = -f_{SP}(x_S, x_P)$$

und, dass es keine externen Kräfte gibt

$$f_S = 0 = f_P.$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_P(t)$ und $x_S(t)$ auf. Stellen Sie die Gleichung auf für den Gesamtdrehimpuls L des Zweikörpersystems und überprüfen Sie rechnerisch, dass L erhalten bleibt. Stellen Sie die kinetische Energie des Zweikörpersystems Planet-Sonne auf. Dann bestimmen Sie den Ausdruck für die potentielle Energie E_{pot} so, dass die totale Energie $E = E_{kin} + E_{pot}$ erhalten bleibt, d.h. $E'(t) = 0$. Hinweis: Die kinetische Energie eines n-Teilchensystems wird gegeben durch

$$E_{kin} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \|x_i\|^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Planetenbewegung um die Sonne durch die Gleichung

$$m_P x''(t) = -G m_P m \frac{x(t)}{\|x(t)\|^3}$$

beschrieben wird. Hierbei ist $G > 0$ die Gravitationskonstante und $m = m_P + m_S$ die totale Masse. Der zugehörige Drehimpuls ist $L = x \times m_P x'$. Zeigen Sie, dass L erhalten bleibt, d.h. $L' = 0$.

(c) Beweisen Sie das zweite Keplersche Gesetz der Planetenbewegung: Der Abstandsvektor $x(t)$ zwischen dem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Strecken. Sei $A_{\Delta t}$ der Kreisausschnitt beschrieben von dem um die Sonne kreisenden Planeten im Zeitintervall Δt. Hinweis: Zeigen Sie erst und gebrauchen Sie dann, dass für $\Delta t = t_2 - t_1$ gilt

$$A_{\Delta t} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|x(t) \times x'(t)\| \, dt$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Sei $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$u(t, x_1, x_2) = (x_1, -t x_2).$$

(a) Bestimmen Sie die Trajektorien und Stromlinien von u.

(b) Sei $\Omega = [0, 1]^2$. Fixieren Sie ein $t > 0$ und bestimmen Sie $\Omega(t) = \phi_t(\Omega)$. Skizzieren Sie das Gebiet $\phi_1(\Omega)$ in der Ebene (x_1, x_2).

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $J\phi_t(x)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Betrachten Sie den Flug eines Teilchens, das auf einer Ebene mit einer Geschwindigkeit $V = (V_1, V_2)$ abgeschossen wird und eine Ladung Q besitzt. Weiterhin ist im Punkt $P = (P_1, P_2)$ eine fixe Ladung Q_P angebracht. Es gilt $QQ_P < 0$, d.h. die Ladungen ziehen sich an.

(a) Entwickeln Sie ein mathematisches Modell. Benutzen Sie dafür die Newton'sche Bewegungsgleichung mit der Kraft

$$F(x) = F_R(v) + F_C(x), \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

Dabei ist $F_R(v) = -\lambda v, \lambda > 0$, die vereinfachte Reibungskraft und F_C die Coulomb-Kraft mit

$$F_C(x) = -k_C Q Q_P \frac{x - P}{\|x - P\|^3}$$

und Coulomb-Konstante $k_C > 0$.

(b) Wählen Sie eine geeignete Skalierung und überführen Sie das Modell in eine dimensionslose Form.