Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Probeklausur

Aufgabe 1:
Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die LR-Zerlegung von A (ohne Permutation) an.

(b) Matrizen, die nur auf der Hauptdiagonalen und auf den beiden Nebendiagonalen Einträge haben (wie oben), heißen tridiagonal.
Zeigen Sie: Es sei B eine invertierbare (n, n)–Matrix und tridiagonal. Der Algorithmus zur Berechnung der LR–Zerlegung von B sei ohne Permutation durchführbar. Dann kann man die LR-Zerlegung von B mit $n-1$ Additionen bzw. Subtraktionen, $n-1$ Multiplikationen und $n-1$ Divisionen berechnen.

Aufgabe 2:

(a) Durch die Messpunkte

$$(t_1, y_1) = (0, 3), (t_2, y_2) = (1, 1), (t_3, y_3) = (4, 5)$$

soll eine Ausgleichsfunktion der Form $u(t) = \alpha + \beta\sqrt{t}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, gelegt werden. Formulieren Sie das zugehörige überbestimmte Gleichungssystem und berechnen Sie die optimalen Parameter α, β.

(b) Bestimmen Sie die Minimum–Norm–Lösung des Gleichungssystems

$$x + y = 1.$$

Aufgabe 3:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Maximumsnorm. Lösen Sie das Problem

$$Ax = b \text{ mit } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

und das gestörte System

$$\tilde{A}\tilde{x} = b \text{ mit } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1+\epsilon \end{pmatrix}$$

für $|\epsilon|$ klein. Berechnen sie den Fehler $||x - \tilde{x}||$ in der Maximumsnorm. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Fehlerabschätzung für $||x - \tilde{x}||$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: ein stückweise linearer Spline s mit den Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ minimiert die Energie

$$E(s) = \int_{x_0}^{x_n} (s'(x))^2 \, dx$$

über alle stückweise differenzierbare Funktionen mit der Nebenbedingung

$$s(x_i) = f_i, i = 0, \ldots, n.$$

Aufgabe 5:

(a) Wie lautet die Definition einer kleinste Quadrate-Lösung, einer Lösung minimaler Norm sowie der verallgemeinerten Inversen einer Matrix?

(b) Sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und $O \in \mathbb{R}^{(m-n)\times n}$ die Nullmatrix. Berechnen Sie die verallgemeinerten Inversen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} D & \\ & O \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} D & O^T \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen sie die verallgemeinerte Inverse von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:
Wir betrachten ein Modell für eine Population $R(t)$ an Raubtieren und eine Population $B(t)$ an Beutetieren. Die Beutetiere vermehren sich in jedem Zeitschritt mit einer konstanten Rate, allerdings vermindert sich die Population durch die Anzahl der pro Zeitschritt gefangenen Tiere, dies ist proportional zur Anzahl der Raubtiere. Die Raubtiere vermehren sich proportional zur gefangenen Beute und sterben sonst mit einer konstanten Rate pro Zeitschritt.

(a) Formulieren Sie ein zeitdiskretes Modell.

(b) Untersuchen Sie dieses Modell auf stationäre Zustände und deren Stabilität.

(c) Leiten Sie im Grenzwert infinitesimal kleiner Zeitschritte ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für R und B her.