Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 9, Abgabe: Donnerstag, 21.6.2018, 12.15 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Wir betrachten die Aufgabe der Vorlesung. Es sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen seien die Aufgaben $A_1 x_1 = b_1$ und $A_2 x_2 = b_2$.
Statt A_k und b_k seien nur die Näherungen $\widetilde{A_k}$ und $\widetilde{b_k}$ bekannt. Die Lösungen der zugehörigen Gleichungssysteme seien $\widetilde{x_k}$. Es gelte

$$|(A_k)_{i,j} - \widetilde{(A_k)}_{i,j}| < \epsilon,\ |(b_k)_i - \widetilde{(b_k)}_i| < \epsilon,\ k, i, j = 1 \ldots 2.$$

1. Für welche ϵ können Sie garantieren, dass die Matrizen $\widetilde{A_k}$ invertierbar sind?
2. Geben sie konkrete Abschätzungen für die relativen Fehlers der $\widetilde{x_k}$ in der Supremumsnorm an (abhängig von ϵ).

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Der Gezeitenwasserstand in der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a \sin \frac{2\pi t}{12} + b \cos \frac{2\pi t}{12}$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	Stunden
H(t)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Hinweis: Das sind echte Messwerte, leider ist die Übereinstimmung am Ende nicht so gut, wie man es gern hätte.

1. Geben Sie ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem an, das von h, a, b erfüllt wird.
2. Geben Sie die Minimum Norm–Lösung des Gleichungssystems an (numerisch), und zeichnen Sie die resultierende Funktion H mit den Messwerten in einer Grafik.
3. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis, das Sie bekommen, wenn Sie nur die Zeiten 0, 6 und 10 bzw. 0, 2 und 4 benutzen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils alle kleinste Quadrate–Lösungen von $Ax = b$ und die Minimum Norm–Lösung.

1. $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, A ist invertierbar mit der Inversen A^{-1}.
2. $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, A ist die Nullmatrix.
3. $A \in \mathbb{R}^{n,1}$, $b \in \mathbb{R}^n$.
4. $A \in \mathbb{R}^{1,n}$, $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Zu den (paarweise verschiedenen) Zeiten t_i werden die Messwerte y_i gemessen, $i = 1 \dots m$, $m > 2$. Es wird ein linearer Zusammenhang $y(t) = at+b$ vermutet. Wir wollen die kleinste Quadrate–Lösung des zugehörigen überbestimmten Gleichungssystems $A(a,b)^t = y$ zur Bestimmung von a und b explizit angeben mit Hilfe der folgenden statistischen Größen. Es seien Mittelwert, Varianz und Kovarianz definiert durch

$$\bar{t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t_i,\ \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i,\ v = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(t_i - \bar{t})^2,\ c = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}).$$

Der Einfachheit halber sei $\bar{t} = 0$.

1. Berechnen Sie die Matrix $A^T A$ und benutzen Sie dabei die gerade eingeführten Variablen.
2. Geben Sie die kleinste Quadrate–Lösung für a und b an.

Zusatzaufgabe: Wie lautet die Lösung, falls $\bar{t} \neq 0$? (Einzeiler: Betrachten Sie $\widetilde{t_i} = t_i - \bar{t}$).