Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 8, Abgabe: Donnerstag, 14.6.2018, 12.15 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Sei P_m eine Permutationsmatrix einer Elementarpermutation, die zwei Zeilen vertauscht. Zeigen Sie, dass
$$P_m^{-1} = P_m = P_m^T$$
gilt und interpretieren sie das Resultat bezüglich Vertauschung.

2. Sei L_k eine Frobeniusmatrix und P_m eine Permutationsmatrix, die zwei Zeilen mit Index größer k vertauscht. Zeigen sie, dass $P_m L_k P_m$ wieder eine Frobeniusmatrix der selben Form ist.

3. Benutzen sie b) um zu zeigen, dass eine Zerlegung der Form $PA = LR$ gibt. Hinweis: $P_2 L_1 = P_2 L_1 P_2 P_2 = L_1' P_2$ usw.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Die Konditionszahl einer Matrix A ist gegeben durch $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. Berechnen sie die Konditionszahl von A für die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$.

2. Für Näherungen $\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{x}$ von A, b, x gelte
$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{mit} \quad \|\tilde{A} - A\|_\infty \leq 0.02.$$
Wie groß darf der Fehler $\|\tilde{b} - b\|_\infty$ sein, damit $\|\tilde{x} - x\|_\infty \leq 0.5$ gilt?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Die p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind für $1 \leq p < \infty$ definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

und für $p = \infty$ durch

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Zeigen Sie für die zugeordneten Matrixnormen

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die folgenden Aussage:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Kondition der Matrizen

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Maximumnorm (Zeilensummennorm).
Wenn Ihnen das noch zu einfach war, bestimmen Sie doch einfach die Kondition der entsprechend aufgebauten $n \times n$ Matrix A_n bzgl. der Maximumnorm.