Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 6, Abgabe: Donnerstag, 31.5.2018, 12.15 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zur Lösung der Transportgleichung

$$\frac{du}{dt} = \pm c \frac{du}{dx}$$

für $t \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ mit Anfangswert $u(x,0) = v(x)$ machen wir den Ansatz $u(x,t) = \phi(x - ct)$. Zeigen Sie, dass so eine Lösung existiert und berechnen sie ϕ aus dem Anfangswert.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Lösen sie das Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

für $t \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ mit Anfangswerten

$$u(x,0) = v(x)$$
$$\frac{d}{dt}u(x,0) = w(x).$$

Hinweis: Kehren sie die Herleitung aus dem Skript um und verwenden sie dann Aufgabe 1 für die Transportgleichungen

Aufgabe 3: (4 Punkte)

1. Frobeniusmatrizen $L_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind Einheitsmatrizen, bei denen in der Spalte k unterhalb der Hauptdiagonalen noch zusätzliche Einträge stehen, also

$$L_k \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -l_{n,k} & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k\text{te-Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ k\text{te-Spalte} \end{array} & \end{array}$$

   Zeigen Sie: Alle Frobeniusmatrizen sind invertierbar. Hinweis: Berechnen Sie $L_k v$ für einen Vektor v und bestimmen Sie eine Matrix L_k^{-1}, so dass $L_k^{-1} L_k v = v$.

2. Es seien L_k und L_m Frobeniusmatrizen für $k < m$. Geben Sie eine Matrix L an, so dass $Lv = L_k L_m v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Hinweis: Damit gilt natürlich $L_k L_m = L$.

3. Eine (n, n)–Matrix A heißt untere Dreiecksmatrix, falls sie oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen besitzt, d.h. $A_{ik} = 0$ für $i < k$. Zeigen Sie: Das Produkt von zwei unteren Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix.

4. Es sei L eine untere Dreiecksmatrix mit $l_{ik} = 1$ für $i = k$. Zeigen Sie, dass L invertierbar ist und dass L^{-1} auch eine untere Dreiecksmatrix ist. Hinweis: Nutzen Sie die Aufgabenteile (a) bis (c).

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem Gauss-Algorithmus (dem Additionsverfahren).

2. Bestimmen Sie die Matrizen P, L_1, L_2, L und R aus der LR–Zerlegung mit Spaltenpivotsuche.

3. Lösen Sie $Ax = b$ mit dieser LR–Zerlegung.