Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 5, Abgabe: Freitag, 18.5.2018, 12.15 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei $\tilde{x} \in \mathbb{R} \setminus 0$ eine Näherung an $x \in \mathbb{R} \setminus 0$. Es sei ϵ der Fehler relativ zu x und $\tilde{\epsilon}$ der Fehler relativ zu $\tilde{x}$. Zeigen Sie:

$$\epsilon \leq \tilde{\epsilon}(1+\epsilon)$$
$$\epsilon \geq \tilde{\epsilon}(1-\epsilon)$$

Wir folgern: Für betragskleine $dx = \tilde{x} - x$ liegen die relativen Fehler in derselben Größenordnung. Im Grenzwert für $dx \to 0$ sind sie gleich. (Die Folgerung ist natürlich nicht zu beweisen.)

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Mit der p, q–Formel berechnet man eine Nullstelle einer quadratischen Gleichung mit

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

1. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, für die diese Formel im human Format einen Fehler von 100% liefert. Hinweis: Wählen Sie x_1 sehr nah an 0, $x_2 = -1$.

2. Geben Sie eine Erklärung dafür, warum der Fehler so groß ist. Hinweis: Betrachten Sie die Verstärkungsfaktoren des Fehlers bei der Addition der Wurzel.

3. Zeigen Sie, dass bei der Berechnung von x_1 mit dem Satz von Vieta (ebenfalls eine Schulformel) im human Format der relative Fehler viel kleiner ist. Tatsächlich ist dies eine stabile Auswertung.

4. Geben Sie ein Kriterium dafür an, wann man x_1 mit der p, q–Formel berechnen sollte, und wann mit Vieta.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Aufgabe sei, die Ableitung einer Funktion numerisch zu approximieren. Wir tun dies durch Ersetzen des Differentialkoeffizienten durch den Differenzenquotienten und bestimmen den Fehler, den wir dabei machen. Zunächst praktisch:

Vergleichen Sie auf einem Taschenrechner oder Computer Ihrer Wahl für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ die analytische Ableitung $f'(x)$ und den Differenzenquotienten

$$F_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

an der Stelle $x = 1$ für die Schrittweiten $h = 10^{-n}$, $n = 0 \ldots 20$.

Skizzieren Sie den Fehler (den Unterschied zwischen Differenzenquotient und Ableitung) in einem doppelt-logarithmisch skalierten Koordinatensystem. Interpretieren Sie das Ergebnis. Für welches h bekommen Sie das beste Ergebnis?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \neq 0$. Geben Sie für F_h aus Aufgabe 3 eine Abschätzung an für

$$\frac{|F_h(x) - f'(x)|}{|f'(x)|}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Taylorentwicklung von $f(x+h)$ und das Schlömilchsche Restglied.

Dies ist der Modellfehler oder Diskretisierungsfehler, der dadurch entsteht, dass wir nicht die Grenzwertdefinition für die Ableitung nutzen, sondern einfach nur ein festes h einsetzen.

Nehmen Sie nun an, dass ein Rechner die Funktion f mit der relativen Genauigkeit *eps* ausrechnen kann. Berechnen Sie mit den Verstärkungsfaktoren den relativen Fehler, den Sie für $F_h(x)$ erwarten müssen. Schätzen Sie dann wie in der Vorlesung die Differenz $f(x+h) - f(x)$ durch den Mittelwertsatz ab.

Dies ist der numerische Fehler, der dadurch entsteht, dass wir nicht unendlich genau rechnen.

Bestimmen Sie nun ein h, für das die beiden Fehler die gleiche Größenordnung haben. Vergleichen Sie dieses h mit dem besten h aus Aufgabe 3 (wobei Sie annehmen können, dass jeder Computer doppelt genau rechnet). Falls Sie mit Octave oder Matlab rechnen: Beide stellen die Variable eps direkt zur Verfügung.