

## Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 4, Abgabe: Mittwoch, 9.5.2018, 16.15 Uhr

---

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion

$$u_{k+1} = \frac{3u_k - u_{k-1}}{2}$$

in Abhängigkeit von  $u_0$  und  $u_1$ . Beschreiben Sie das Langzeitverhalten. Was könnte eine biologische Interpretation sein?

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

- (i) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  einen Fixpunkt  $\bar{x} \in [a, b]$  besitzt.
- (ii) Finden Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion  $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ , die keinen Fixpunkt besitzt (Sie dürfen  $a$  und  $b$  frei wählen).
- (iii) Finden Sie für  $a > 0$  den Fixpunkt der Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}.$$

Ist der Fixpunkt anziehend?

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

Gegeben sei das dynamische System

$$N_{k+1} = N_k + \tau r N_k (1 - N_k)$$

für  $\tau$  klein. Schätzen sie den Fehler in der Gleichung ab, wenn Sie  $N_k = N(k\tau)$  oben einsetzen, wobei  $N$  die Lösung von

$$N'(t) = rN(1 - N)$$

mit Anfangswert  $N(0) = N_0$  ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung um  $k\tau$ .

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)*Diskretes Lemma von Grönwall*Sei  $u_{k+1} \leq au_k + b$  für  $k \geq 0$ . Zeigen Sie, dass

$$u_k \leq a^k u_0 + \frac{a^k - 1}{a - 1} b$$

gilt.

Hinweis: Variation der Konstanten analog zu Differentialgleichungen.