

## Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 1, Abgabe: Donnerstag, 3.5.2018, 12.15 Uhr

---

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen:

(i)  $u'(t) = u(t)(1 - u(t)), \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = \frac{3}{4},$

(ii)  $u'(t) = e^{-u(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = 1,$

(iii)  $u'(t) = u(t)^3, \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = -1.$

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

Zeigen Sie das Prinzip der linearen Stabilität für Differentialgleichungen

$$u'(t) = g(u(t)), \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} :$$

Ist  $\bar{u}$  eine stationäre Lösung, d.h.  $g(\bar{u}) = 0$  und gilt  $g'(\bar{u}) < 0$ , so folgt für alle  $u(0)$  mit  $|u(0) - \bar{u}| < \delta$  und  $\delta$  hinreichend klein, dass

$$u(t) \rightarrow \bar{u} \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty$$

gilt. Hinweis: Verwenden Sie einen analogen Ansatz zur Vorlesung mit Taylor-Entwicklung und dem Lemma von Grönwall.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

Berechnen Sie für folgendes dynamisches System einen Fixpunkt und analysieren Sie seine asymptotische Instabilität

(i)  $u_{k+1} = u_k(1 - u_k),$

(ii)  $u_{k+1} = u_k + \tau u_k(1 - u_k)$  mit  $\tau > 0, \tau \ll 1,$

(iii)  $u_{k+1} = u_k + \tau u_k(1 - u_k^2)$  mit  $\tau > 0.$

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Eine Population besteht aus zwei Geschlechtern  $m$  und  $f$ , die sich zu Paaren (der Einfachheit halber betrachten wir hier zunächst nur Paare mit jeweils einem  $m$  und einem  $f$ ) zusammenschließen können. Jedes Paar erzeugt Nachkommen mit der Rate  $\alpha$ , wobei die Wahrscheinlichkeit für  $m$  und  $f$  jeweils bei  $\frac{1}{2}$  liegt. Freie Individuen bilden Paare mit einer Rate  $\beta$ , Paare trennen sich mit der Rate  $\eta$ . Stellen Sie ein Modell für die Entwicklung der Anzahlen  $f$  und  $m$  sowie für die Paare im Verlauf der Zeit auf.