Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 1, Abgabe: Donnerstag, 26.4.2018, 12.15 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zur Rückzahlung eines Kredites (bei kontinuierlicher Verzinsung und Rückzahlung) wird statt einer festen Laufzeit ein Rückzahlungsverlauf $x(t)$ festgelegt. Das führt bei konstanter Zinsrate r auf die Differentialgleichung

$$P'(t) = rP(t) - x(t)$$

mit zeitabhängiger Inhomogenität. Man reduziere die Berechnung einer Partikulärlösung $P_p(t)$ mittels Variation der Konstanten auf eine Integration. Das bedeutet, dass man den Ansatz $P_p(t) = c(t)e^{rt}$ macht (d.h. die Konstante in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung wird variiert).

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Angenommen, es wird ein linearer Anstieg der Rückzahlungsrate vereinbart, d.h. $x(t) = \alpha t$. Man berechne den Schuldenverlauf. (Hinweis: Für diese spezielle Wahl kann eine homogene Lösung auch mit einem einfacheren Ansatz gefunden werden.) Kann man etwas Intelligentes über eine geeignete Wahl von α sagen? Man skizziere typische Graphen des Schuldenverlaufs.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Angenommen, eine Studentin bekommt für die 5-jährige Dauer ihres Studiums jährlich 10.000 Euro Kredit zur Finanzierung von Studiengebühren. Dank ihres hohen Akademikerinneneinkommens kann sie unmittelbar nach Ende ihres Studiums damit beginnen, 500 Euro/Monat zurückzuzahlen. Geht man von monatlicher Verzinsung mit 2 Prozent nominalen Zinsen aus, wie lange dauert es dann, bis der Kredit abbezahlt ist?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Signalentrauschung
Wir betrachten ein Signal $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, das wir als einfache Fouriercosinusreihe schreiben können, d.h.

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\pi x)$$

Nun nehmen wir an, dass statt f das verrauschte signal $g = f + r$ gegeben ist, wobei r Rauschen der Form

$$r(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n \cos(n\pi x)$$

ist. Der Unterschied zwischen Signal und Rauschen liegt nun in der Annahme, dass A_n für kleine n relativ groß ist und mit wachsendem n fällt, während das Rauschen in allen Frequenzen ungefähr gleich ist. Dies bedeutet $|B_n| \approx |B_1|$ für alle n, mit $|B_1| << |A_1|$, aber $|B_N|$ typischerweise sogar größer als $|A_N|$. Für den Fall eines diskreten Signals $g_N = (g(\frac{k}{N}))_{k=0,\dots,N}$ betrachten wir eine einfache lineare Filtermethode zur Entrauschung:

$$f_{entrauscht}\left(\frac{k}{N}\right) = \omega\left(g\left(\frac{k-1}{N}\right) + g\left(\frac{k+1}{N}\right)\right) + (1-2\omega)\, g\left(\frac{k}{N}\right)$$

für $\omega \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, \dots, N_1$. Berechnen sie $f_{entrauscht}$ abhängig von den A_n und B_n und interpretieren sie ihr Resultat, erklären sie insbesondere warum das Rauschen reduziert wird im Vergleich zum Signal.