Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Führen Sie drei Schritte des Jacobi-Verfahrens

$$x^{k+1} = (I - D^{-1}A)x^k + D^{-1}b$$

und des Gauss-Seidel Verfahrens

$$x^{k+1} = (I - (D+L)^{-1}A)x^k + (D+L)^{-1}b$$

für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $b = (1,1,1)^T$ durch und vergleichen sie die Ergebnisse. Dabei ist D eine Diagonalmatrix mit der gleichen Diagonale wie A und L der linke untere Anteil von A, d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 + 5x - 6$ im Intervall $I = [0, 2]$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$ mit $\bar{x} \in I$.

1. Formulieren Sie das Problem in ein Fixpunktproblem ihrer Wahl um, d.h. als $x = g(x)$. Untersuchen Sie ob g eine Selbstabbildung und Kontraktion auf I ist (nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert dann genau ein Fixpunkt von g, bzw. genau eine Nullstelle von f).

2. Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis nach zwei Iterationen mit dem Fixpunkt $\bar{x} = 1$.

3. Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche von f auf und geben Sie die Iterationsvorschrift explizit an. Vereinfachen Sie das Verfahren so weit wie möglich.

4. Führen Sie zwei Iterationen des Newton-Verfahrens mit Startwert $x^0 = 0$ durch.

5. Vergleichen Sie den Fehler des Fixpunktverfahrens mit dem des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung an dem Beispiel $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ anhand einer Skizze. Berechnen Sie dazu x^0, x^1 sowie x^2 und geben Sie die vollständige Gleichungen der dazugehörigen Tangenten an.