Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 10, Abgabe: Donnerstag, 28.6.2018, 12.15 Uhr

---

21. Juni 2018

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei A eine Matrix aus dem $\mathbb{R}^{m\times n}$. Häufig hat die Pseudoinverse sehr ähnliche Eigenschaften wie die Inverse, daher der Name. Für die Inverse gilt etwa

$$AA^{-1}A = A,\ A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}.$$

Zeigen Sie: Es gilt auch

$$AA^{+}A = A,\ A^{+}AA^{+} = A^{+}.$$

Machen Sie sich dies zunächst für den einfachen Fall klar, dass A vollen Rang hat, und zeigen Sie es dann auch für den Fall, dass A nicht vollen Rang hat.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir haben die Gauss–Normalgleichungen aus der Forderung, dass $||Ax-b||_2$ möglichst klein sein soll, hergeleitet.
In der Bildverarbeitung ist das häufig unpraktisch. Man sucht nicht nur die beste Annäherung an b, sondern eine, bei der auch die Norm von x nicht zu groß ist. Dabei hilft eine Idee von Tikhonov und Philips (ca. 1960).
Wir wählen ein $\gamma > 0$ und suchen ein $\bar{x}_\gamma \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$||A\bar{x}_\gamma - b||_2^2 + \gamma^2||\bar{x}_\gamma||_2^2 \le ||Ay-b||_2^2 + \gamma^2||y||_2^2 \ \forall\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Dann gilt

1. $$(A^tA + \gamma^2 I)\bar{x}_\gamma = A^t b.$$
   Gehen sie vor wie im zweiten Beweis zur Gauss–Normalgleichung aus der Vorlesung.
2. $A^tA + \gamma^2 I$ ist invertierbar.

Bemerkung: $\bar{x}_\gamma$ ist eindeutig durch diese Gleichung charakterisiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $\mathcal{P}_N$ der Raum der Polynome von Grad kleiner gleich N.
Gegeben sei die Interpolationsaufgabe: Bestimme $p \in \mathcal{P}_N$ mit $p(x_k) = y_k$, $k = 0,\dots,N$, x_k paarweise verschieden. Weiter seien die Lagrange–Polynome L_k definiert durch

$$L_k(x) := \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}, k = 0,\dots,N.$$

1. Zeigen Sie:

(a) $L_k \in \mathcal{P}_N$.

(b) $L_k(x_k) = 1$.

(c) $L_k(x_j) = 0, k \neq j$.

2. Es sei

$$p(x) := \sum_{k=0}^{N} y_k L_k(x).$$

Zeigen Sie: p ist Lösung der Interpolationsaufgabe.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei $x_k = k$, y_k gegeben.

1. Geben Sie für $N = 0, 1, 2, 3$ das Polynom $p_N \in \mathcal{P}_N$ an mit $p(x_k) = y_k$, $k = 0, \ldots, N$.

2. Zu berechnen sei $I_N = \int_0^N f(x)dx$, $N = 1, 2, 3$. Es stehen nur die Werte von f an den Stellen x_k, $y_k = f(x_k)$, $k = 0 \ldots N$, zur Verfügung. Deshalb approximieren wir I_N durch $\int_0^N p_N(x)dx$. Geben Sie die sich ergebenden Formeln explizit an.
Hinweis: Man tut sich leichter, wenn man ein Programm zur symbolischen Formelmanipulation benutzt.

3. Zu berechnen sei das Volumen V eines Fasses. Bekannt ist, dass der Radius des Fasses oben den Wert r hat, in der Mitte R, und unten wieder r. Die Höhe sei 2. Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabenteil 2. eine Näherung an das Volumen. Diese Formel stammt von Kepler.
Hinweis: Benutzen Sie das Polynom $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = r^2$, $p(1) = R^2$, $p(2) = r^2$.

Bemerkung: Die sich in 2. ergebenden Formeln heißen Newton–Cotes–Formeln und sind nacheinander Trapezregel, Keplersche Fassregel, Newtonsche 3/8–Regel. Falls Sie die Ergebnisse irgendwo abschreiben: Berücksichtigen Sie, dass das Grundintervall hier von 0 bis N geht.