

Übungen zur Vorlesung Praxisorientierte Einführung in die Numerik

Übungsblatt 1, Abgabe: Donnerstag, 19.4.2018, 12.15 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)*Das Zugbeispiel*

Um 15:00 Uhr fährt in Wien ein Zug Richtung Salzburg ab mit der Geschwindigkeit 80 km/h. Um 15:30 fährt im 300km entfernten Salzburg ein Zug Richtung Wien ab mit der Geschwindigkeit 100 km/h. Die Züge beschleunigen mit $0,5 \text{ m/s}^2$ bis sie ihre angegebenen Geschwindigkeiten erreichen, und sie bremsen vor Bahnhöfen ebenso schnell, bis sie zum Stehen kommen. In Linz (180km von Wien) haben beide 5 Minuten Aufenthalt. Wo begegnen die beiden Züge einander?

Aufgabe 2: (4 Punkte)*Abkühlung einer Flüssigkeit*

In einer Badewanne befindet sich heißes Wasser. Die Temperatur des Wassers zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $T(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Wasser die Temperatur $T_1 = 50$ (Grad Celsius).

Wir nehmen an: Für eine kurze Zeitspanne dt ist der Wärmeverlust des Badewassers proportional zur Differenz der aktuellen Temperatur und der Außentemperatur $T_0 = 20$ und zu dt , also

$$T(t + dt) = T(t) - \lambda dt(T(t) - T_0)$$

mit dem Wärmekoeffizienten $\lambda = 0.1$. Leiten Sie die zugehörige Differentialgleichung her. Zeigen Sie: Die Lösung dieser Gleichung ist

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\lambda t}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Wir wenden die Idee aus der zweiten Aufgabe auf ein etwas praktischeres Beispiel an. Wir möchten einen Milchkaffee machen mit Milch aus dem Kühlschrank, was eine ganz schlechte Idee ist, aber das ist ja nur ein Beispiel. Wir betrachten dabei zwei Szenarien:

1. Wir gießen 100ml Milch in eine Tasse (in einem Schwung). Die Milch hat eine Temperatur von $T_1 = 6$ Grad. Anschließend stellen wir die Tasse unter die Kaffeemaschine und lassen 200 ml Kaffee mit der Temperatur $T_2 = 90$ Grad langsam und gleichmäßig hineinlaufen. Das dauert 100 Sekunden. Wir messen die Temperatur des Gemischs, sobald der Kaffee vollständig hineingelaufen ist.
2. Wir stellen die leere Tasse unter die Kaffeemaschine und lassen erst den Kaffee hineinlaufen (das dauert wieder 100s), gießen dann in einem Schwung die Milch dazu und messen sofort danach die Temperatur.

Wir nehmen an, dass sich Milch physikalisch genau wie Kaffee verhält. Das Kaffee-Milch-Gemisch ist immer optimal vermischt, die Temperatur darin ist homogen. Die Außentemperatur sei $T_0 = 20$ Grad. Der Wärmekoeffizient λ aus der Vorlesung, also der Wärmeverlust des Gemischs, sei $0.1/s$.

1. Stellen Sie zunächst eine Vermutung auf, welche Mischmethode den heißeren Kaffee liefert, oder ob die Endtemperatur bei beiden Methoden gleich ist.
2. Wir vernachlässigen zunächst den Wärmeverlust wegen der Außentemperatur. Berechnen Sie für beide Methoden in diesem Fall die Endtemperatur.
3. Es sei $T(t)$ die Temperatur der Mischung in der Tasse zum Zeitpunkt t . Berechnen Sie $T(t)$ für beide Fälle (wieder ohne den Wärmeverlust zu berücksichtigen).
4. Wir berücksichtigen nun auch den Wärmeverlust. Geben Sie für beide Fälle an, wie hoch für kleines dt die Temperatur zum Zeitpunkt $t + dt$ ist, wenn sie zum Zeitpunkt t bekannt ist.
5. Berechnen Sie die zugehörigen Differentialgleichungen, indem Sie dt gegen 0 gehen lassen. Achtung: Für eins der beiden Szenarien bekommen Sie ein Problem. Warum?

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Wie wahrscheinlich ist es, bei einem Wurf mit zwei fairen Würfeln einen 'Pasch' zu würfeln, d.h. zweimal dieselbe Augenzahl? Wie verändert sich das Resultat, wenn die Würfel so gezinkt sind, dass mit einem Würfel die Augenzahl '6' mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewürfelt wird und die anderen 5 Augenzahlen dieselbe Wahrscheinlichkeit haben?