2. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 2.1
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen über ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

a) Für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{ggT}(a^k, b^l) = \mathrm{ggT}(a, b)^{\min\{k,l\}}$.

b) Gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so ist $\mathrm{ggT}(a^k, b) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so ist $\mathrm{ggT}(ab, c) = \mathrm{ggT}(a, c) \cdot \mathrm{ggT}(b, c)$.

d) $\mathrm{ggT}(a^2, b^2)$ ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 2.2
Für $a \in \mathbb{Z}$ und eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ definieren wir

$$\nu_p(a) = \begin{cases} \infty & \text{falls } a = 0 \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k | a\} & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}.$$

Man nennt ν_p die *p-adische Bewertung* von a.

i) Zeige, dass $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ gilt. (Dabei setzen wir als Konvention $\infty + l = \infty = \infty + \infty$.)

ii) Für $a \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$|a|_p = \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 0 \\ p^{-\nu_p(a)} & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}.$$

Zeige für alle $a, b \in \mathbb{Z}$:

(1) $|a \cdot b|_p = |a|_p \cdot |b|_p$
(2) $|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\} \leq |a|_p + |b|_p$
(3) $|a|_p = 0$ genau dann, wenn $a = 0$

Bitte wenden.

Aufgabe 2.3
Wir definieren eine Menge von Zahlen $Z := \{4n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ein Element $p \neq 1$ von Z nennen wir *Promzahl*, wenn die einzigen Zahlen $z \in Z$, die p teilen, 1 und p sind.

a) Nenne die ersten zehn Promzahlen in Z.

b) Beweise, dass jede Zahl in Z als ein Produkt von Promzahlen geschrieben werden kann.

c) Zeige, dass die Promfaktorzerlegung nicht notwendigerweise eindeutig ist.

Aufgabe 2.4
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, $a|c$ und $b|c$, so folgt $ab|c$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 26.4.2018, 8 Uhr