1. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 1.1
Beweise mit dem 1. Induktionsprinzip, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 1.2
Wir definieren die Fibonacci-Zahlen $F_i, i \in \mathbb{N}$ rekursiv durch $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_{i+2} = F_i + F_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Beweise mithilfe des 2. Induktionsprinzips, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die explizite Formel

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right)$$

gilt.

Aufgabe 1.3
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen über ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

a) Aus $a|bc$ folgt $a|b$ oder $a|c$.

b) Aus $a|(b+c)$ folgt $a|b$ oder $a|c$.

c) Aus $a|bc$ und $a|b$ folgt $a|c$.

d) Aus $a|(b+c)$ und $a|b$ folgt $a|c$.

Bitte wenden.

Aufgabe 1.4
Wo steckt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?
Behauptung: Alle Menschen sind gleich groß.
Beweis: Mit vollständiger Induktion nach der Anzahl n der Menschen:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen und für $n = 1$ ist die Behauptung wahr, da ein einzelner Mensch nur eine Größe hat.
Induktionsschritt: Sei für festes $n \in \mathbb{N}$ für alle $k < n$ die Aussage richtig, dass in einer Gruppe von k Menschen alle gleich groß sind. Betrachte nun eine Gruppe von n Menschen und nummeriere sie von 1 bis n. Nach Induktionsannahme sind alle Menschen in der Gruppe $\{1, \ldots, n-1\}$ gleich groß und alle Menschen in der Gruppe $\{2, \ldots, n\}$ gleich groß. Da diese Mengen nicht-leeren Schnitt haben, sind also alle n Menschen gleich groß.

Abgabe bis: Donnerstag, den 19.4.2018, 8 Uhr